

**Optimale Kontrolle von Stefan-Problemen
mit Methoden der
nichtlinearen Approximationstheorie**

Peter Jochum

1978



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Optimale Kontrolle von Stefan-Problemen mit Methoden
der nichtlinearen Approximationstheorie

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereiches Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Peter Jochum
aus Augsburg

eingereicht im Oktober 1978

1. Referent: Prof. Dr. G. Hämmerlin

Korreferent: Prof. Dr. A. Sachs

Tag der mündlichen Prüfung: 19.12.1978



1. Einleitung	1
1.1 Problemstellung und bekannte Resultate	1
1.2 Übersicht über die folgenden Kapitel	7
2. Analysis	9
2.1 Bekannte Eigenschaften von Lösungen freier Randwertprobleme	9
2.2 A-priori-Abschätzungen	14
2.3 Darstellung der Frechet-Ableitung	21
2.4 Entkopplung des Ableitungssystems	27
2.5 Existenz einer eindeutigen Lösung δs	30
2.6 F-Differenzierbarkeit des Lösungsoperators S ...	34
2.7 Lipschitz-Stetigkeit der F-Ableitung	41
2.8 Dirichlet-Randbedingung auf der t -Achse	44
2.9 Verallgemeinerungen	46
2.10 Der Fall $s(0)=0$	48
3. Approximation	52
3.1 L_2 -Approximation	53
3.2 Existenz einer besten L_∞ -Approximation	59
3.3 Regularität des Tangentialraumes	68
3.4 Haarsche Bedingung	70
3.5 Charakterisierung der besten L_∞ -Approximation ..	79
3.6 Starke Eindeutigkeit	82
3.7 Fehlereinschließung	86
4. Numerische Approximation	87
4.1 Das Osborne-Watson-Verfahren	87
4.2 Konvergenz des Verfahrens	91
4.3 Diskretisierungsverfahren	93

4.4	Berücksichtigung von Restriktionen	97
4.5	Lineare Suche	99
4.6	Numerische Testbeispiele	99
5.	Zusammenfassung	118
5.1	Analytische Eigenschaften des Lösungsoperators .	119
5.2	Existenz und Charakterisierung bester Approximationen ...	121
5.3	Konvergenz und numerische Realisierung	123
6.	Literatur	124

Bezeichnungen und Abkürzungen

(i,j,k)	k -te Formel (oder Aussage) im j -ten Abschnitt des i -ten Kapitels
$\dot{s}$	$\frac{d}{dt} s$, analog: $\ddot{s}$
$\Omega(s)$	$\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < s(t), 0 < t \leq T\}$
$C^\alpha[0,T]$	Raum der auf $[0,T]$ $[\alpha]$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren $[\alpha]$ -te Ableitung Hölderstetig mit Exponent $\alpha - [\alpha]$ ist ($0 < \alpha \in \mathbb{N}$).
$f > g$	f ist für alle Argumente aus dem gemeinsamen Definitionsbereich von f und g größer als g ; analog: $>, <, \leq$.
$\ g\ _t$	$\sup_{0 \leq \tau \leq t} g(\tau) $
$\Rightarrow$	Implikationspfeil
K	Singularitätenfunktion der Wärmeleitungsgleichung, siehe (2.1.16)
G	Greensche Funktion der Halbebene $\{x \geq 0\}$, siehe (2.1.21)
N	Neumannsche Funktion, siehe (2.1.21)
S	Lösungsoperator, siehe (2.3.2)
B	$(C[0,T], \ \cdot\ _T)$
S'_g	F-Ableitung von S an der Stelle g
$h _{[0,\epsilon]}$	h eingeschränkt auf $[0,\epsilon]$
h_+	$\max(0, h(t))$
h_-	$-\min(0, h(t))$
$w(F;\delta)$	Stetigkeitsmodul von F
$\ \cdot\ _2$	L_2 -Norm

$(\cdot, \cdot)_2$	L_2 -Skalarprodukt
$\rho_V(\tilde{S})$	Minimalabstand, siehe (3.2.1)
∂D	Rand von D
S_ϵ	siehe Definition (3.4.10)
$S'_{\epsilon, g}$	siehe Definition (3.4.10)
$\ \cdot\ _{\epsilon, T}$	siehe Definition (3.4.10)
$\rho(\epsilon)$	siehe Definition (3.4.10)
FRWP	freies Randwertproblem
ISP	inverses Stefan-Problem
WLG	Wärmeleitungsgleichung
TR	Tangentialraum
HB	Haarsche Bedingung
GHB	globale Haarsche Bedingung
LHB	lokale Haarsche Bedingung
SEBA	stark eindeutig beste Approximation
LSEBA	lokal stark eindeutig beste Approximation

I. Einleitung

1.1 Problemstellung und bekannte Resultate

Schmelzvorgänge, Kristallisations- und Diffusionsprozesse, physikalische Phänomene also, deren charakteristische Kenngrößen wie Temperaturverteilung bzw. ortsabhängige Konzentration, Energieinhalt usw. infolge der sich kontinuierlich ändernden Schmelz- bzw. Diffusionsgrenze zu verschiedenen Zeiten auf verschiedenen Teilmengen des Raumes definiert sind, werden mathematisch durch sogenannte "freie Randwertprobleme" oder "Stefan-Probleme" beschrieben.

Eine typische Aufgabe aus dem Bereich parabolischer freier Randwertprobleme besteht in der Bestimmung zweier Funktionen (u, s) , die dem folgenden Differentialgleichungssystem genügen (der Lösungsbegriff wird im nächsten Kapitel präzisiert):

$$(1.1.1) \quad Lu(x, t) = (u_{xx} - u_t)(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega(s) := \\ \quad \quad \quad := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < s(t), 0 < t \leq T\},$$

$$1.1.2 \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty,$$

$$(1.1.3) \quad u_x(0, t) = g(t),$$

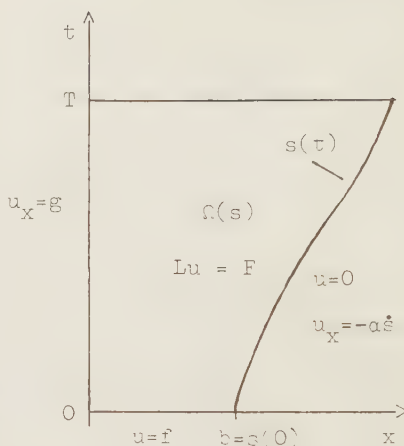
$$(1.1.4) \quad u(s(t), t) = 0, \quad \left. \vphantom{u(s(t), t) = 0} \right\} \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha > 0.$$

$$(1.1.5) \quad u_x(s(t), t) = -\alpha \dot{s}(t),$$

Die Gleichungen (1.1.1-5) stellen das mathematische Modell eines Schmelz- oder Kristallisationsprozesses dar, wobei sich u als die orts- und zeitabhängige Temperaturverteilung innerhalb der Schmelze, s als die Schmelzgrenze, f als die Anfangs-

temperaturverteilung und g als die Energiezufuhr ("Kontrolle") interpretieren lassen (Stefan-Problem, [34,57]).

Häufig ist man aber nicht nur an der zu einer gegebenen Wärmeflußsteuerung g gehörigen Schmelzgrenze s interessiert, sondern sucht zu einem gewünschten Schmelzverlauf $\tilde{s}$ eine Energieflußsteuerung g , die einen Schmelzverlauf s erzeugt, der mit $\tilde{s}$ übereinstimmt oder $\tilde{s}$ mindestens gut approximiert.



Das sogenannte "inverse Stefan-Problem" (ISP) besteht also in der Aufgabe, bei bekannter Anfangstemperaturverteilung f und Inhomogenität F zu einer gegebenen Schmelzgrenze $\tilde{s}$ eine Temperaturverteilung u (und damit $u_x(0, t) = g(t)$) so zu bestimmen, daß das Paar $(u, \tilde{s})$ das freie Randwertproblem (FRWP) (1.1.1-5) löst. Probleme dieser Art treten z.B. bei der gewichtsoptimalen Dimensionierung von Hitzeschilden und bei der Regelung der Eintrittsgeschwindigkeit von Raumkapseln in die Erdatmosphäre auf ([46, S.112 ff.]).

Das ISP läßt sich als nichtcharakteristisches Cauchy-Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung (WLG) auffassen, da auf der gegebenen, nichtcharakteristischen Kurve $\tilde{s}$ durch (1.1.4) und (1.1.5) zwei Anfangsbedingungen vorgeschrieben werden. Das nichtcharakteristische Anfangswertproblem besitzt einige für die numerische Behandlung unangenehme Eigenschaften. Seine (nur unter starken Voraussetzungen an $\tilde{s}$ existierende) Lösung ist bereits ohne die zusätzliche Bedingung (1.1.2) lokal (d.h. in einem genügend schmalen ϵ -Schlauch um $\tilde{s}$) eindeutig bestimmt (Friedman [35]), hängt aber unstetig von den Anfangsbedingungen (1.1.4,5) ab (Pucci [63]). Das ISP ist deshalb im Hadamardschen Sinne nicht

korrekt gestellt. Pucci [62] gab für den Spezialfall $\tilde{S}(t) = \text{const.} = 0$ das folgende Beispiel an:

$$u_n(x,t) = \frac{1}{n^2} [e^{nx} \sin(2n^2 t + nx) + e^{-nx} \sin(2n^2 t - nx)] \quad .$$

Es gilt:

$$Lu_n(x,t) = 0 \quad , \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad ,$$

$$u_n(0,t) = \frac{2}{n^2} \sin(2n^2 t) \quad , \quad u_{nx}(0,t) = 0 \quad .$$

Offensichtlich strebt $u_n(0,t)$ für $n \rightarrow \infty$ auf jedem kompakten Intervall $[0,T]$ gleichmäßig gegen 0, wogegen $|u_n(x,t)|$ für festes $x \neq 0$ über alle Grenzen wächst.

Trotz der physikalisch sinnvollen Fragestellung führt also das ISP (wie häufig bei inversen Problemen zu korrekt gestellten Aufgaben) auf ein (mathematisch) nicht korrekt gestelltes Problem. Zur Regularisierung inkorrekt gestellter Aufgaben sind i.w. zwei Methoden gebräuchlich (Eckhardt [32]):

- (i) Anstatt die Operatorgleichung zu lösen, minimiert man die Summe aus der Norm des Defekts und einem Penaltisierungsterm, der der Norm der Lösung proportional ist ("Tichonov-Regularisierung" [69]).
- (ii) Einschränkung der Lösungsmenge durch zusätzliche a-priori-Annahmen wie Positivität, Beschränktheit, Konvexität der Lösung, um die stetige Abhängigkeit von den Randbedingungen innerhalb dieser verkleinerten Lösungsmenge zu erzwingen (John [49], Pucci [62]).

Wir wollen kurz auf die bisher veröffentlichten Methoden zur analytischen und numerischen Behandlung des ISPs eingehen, bei denen meistens das zweite Verfahren bevorzugt wird, seit neuem aber auch die Tichonov-Regularisierung Anwendung findet.

Neben einigen wohl nur für theoretische Untersuchungen geeigneten Differenzenschemata (z.B. Pucci [61]) stammt das u.W. erste, auch praktisch anwendbare Verfahren zur Lösung des nichtcharakteristischen Anfangswertproblems für den Spezialfall $u(0,t) = \Phi(t)$, $u_x(0,t) = \Psi(t)$ von Ginsburg [41], bei dem die Lösung durch endliche Fourierreihenabschnitte angenähert wird. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist allerdings gering, und eine Verallgemeinerung auf den Fall $\tilde{s}(t) \neq \text{const.}$ scheint nur schwer möglich.

Nachdem Pucci [62] die stetige Abhängigkeit positiver Lösungen von den nichtcharakteristischen Anfangsbedingungen nachgewiesen hatte, zeigte Cannon in zwei Artikeln ([9,10]) die Hölder-stetige Abhängigkeit gleichmäßig beschränkter Lösungen von den Daten. Durch die Verwendung der Singularitätenfunktion der WLG konstruierten Cannon und Douglas [11] auf der Basis dieser Abschätzungen ein Verfahren, das durch die Minimierung gewisser Kompatibilitätsrelationen zwischen den Randbedingungen die gesuchte Steuerung g des Problems (1.1.1-5) durch Polygonzüge approximiert.

Die numerische Lösung wird dabei auf die Lösung eines endlichdimensionalen, linearen Optimierungsproblems reduziert, dessen numerische Behandlung allerdings erhebliche Schwierigkeiten bereitet, da zur Berechnung der Restriktionsmatrix singuläre Integrale numerisch berechnet und zum Erreichen akzeptabler Genauigkeiten große Simplextableaus bewältigt werden müssen (siehe [46, S.125 ff.]). Darüberhinaus lassen sich die (durch die inkorrekte Problemstellung) starken Rundungsfehlereinflüsse nur schwer in den Griff bekommen, sodaß z.B. a-priori unklar ist, mit welcher Genauigkeit die Elemente der Restriktionsmatrix berechnet werden müssen. Von uns durchgeführte numerische Tests verliefen in den meisten Fällen unbefriedigend.

Hill [43] gelang es 1967, die Lösung des ISP in geschlossener Form anzugeben:

$$(1.1.6) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} (x - \tilde{s}(t))^{2n} .$$

Formel (1.1.6) läßt sich für "einfache" Funktionen $\tilde{s}$ (z.B. $\tilde{s}(t) = a + bt$) ausrechnen und kann deshalb zur Konstruktion von Testbeispielen herangezogen werden, für komplizierteres $\tilde{s}$ ist u jedoch nicht mehr durch elementare Funktionen darstellbar. Eine Auswertung der Reihe (1.1.6) mittels numerischer Differentiation führt zu den hinlänglich bekannten Schwierigkeiten.

Von Budak und Valsil'eva [7,8] wurde das folgende Verfahren vorgeschlagen:

$$\text{Minimiere } I(g) = \int_{\Omega(\tilde{s})} (\bar{u} - \bar{u})^2(x,t) dx dt, \quad g \in R,$$

wobei R eine geeignete Restriktionsmenge und $\bar{u}$ und $\bar{u}$ die Lösungen der festen Randwertprobleme (1.1.1-4) bzw. (1.1.1,2,3,5) für $s=\tilde{s}$ sind. Eine Funktion g^* mit $I(g^*)=0$ löst daher das ISP.

Minimiert man $I(g)$ mittels eines Gradientenverfahrens, so müssen für jede Funktionsauswertung zwei feste Randwertprobleme und in jedem Abstiegszyklus das adjungierte System gelöst werden. Hinzukommt, daß das Gradientenverfahren nur linear konvergiert, und bei Vorliegen zusätzlicher Kontrollrestriktionen (ausgedrückt durch R) der zur Minimalkontrolle g^* gehörige freie Rand s^* den gewünschten freien Rand $\tilde{s}$ nur schlecht approximiert. Von den Autoren wurden keine numerischen Resultate angegeben.

Alle bisher zitierten Arbeiten benutzen zur Regularisierung des ISPs die Methode (ii). Ein erst kürzlich von Saguez [64, 65] veröffentlichtes Verfahren bedient sich hingegen der Tichonov-Regularisierung:

Sei $\tilde{s}$ der gesuchte freie Rand, Q ein $\Omega(\tilde{s})$ umfassendes Rechteck und $S(g)$ der durch die Kontrolle g als Lösung von (1.1.1-5) eindeutig bestimmte Rand. Weiter seien $\chi_{\tilde{s}}$ und χ_g die charakteristischen Funktionen der Mengen $Q \setminus \Omega(\tilde{s})$ bzw. $Q \setminus \Omega(S(g))$. Das von Saguez vorgeschlagene Verfahren lautet:

$$(1.1.7) \quad \text{Minimiere } I(g) = \int_Q (\chi_{\tilde{S}} - \chi_g)^2(x,t) dx dt + C \|g\|_2^2, \\ g \in R,$$

Vom Aufwand und der Konvergenzgeschwindigkeit her ist (1.1.7) mit der Methode von Budak und Vasil'eva vergleichbar, zeichnet sich aber durch bessere Approximationseigenschaften aus. Saguez gibt für einfache Fälle numerische Resultate an, die theoretischen Betrachtungen sind jedoch zum Teil nicht nachvollziehbar (siehe auch Abschnitt (3.1)).

Inverse Probleme zu elliptischen und parabolischen FRWPen werden in der französischsprachigen Literatur auch als "Gebietsidentifikationsprobleme" bezeichnet. Die zahlreichen dort erschienen Arbeiten gehen praktisch ausnahmslos von der Formulierung (1.1.7) aus, also von der Minimierung des L_2 -Abstandes der charakteristischen Funktionen mittels eines projizierten Gradientenverfahrens. Wir nennen daher nur stellvertretend die Arbeiten von Cea [22], Cea, Gioan, Michel [23] und Chenais [20] und die dort zitierte Literatur.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir die Artikel von Quilghini [20], der das ISP mittels analytischer Methoden (Greensche Funktion) behandelt, und von Cannon und Ewing [13], die ein Differenzenverfahren mit optimaler Schrittweitenwahl (ohne Regularisierung) vorschlagen, dafür aber nur Fehlerordnungen vom logarithmischen Typ erhalten. Beide Verfahren kommen für die Praxis wohl nicht in Frage.

Am Ende dieses Abschnitts soll nicht übergangen werden, daß die (theoretisch mögliche) Invertierung von Differenzenverfahren, welche sich zur Lösung FRWPe eignen, numerisch fast immer unbrauchbare Ergebnisse liefert, obwohl sie von einzelnen Autoren empfohlen wird (Meyer [56, S.263]).

Eine Analyse der rückwärtsgenommenen Differenzengleichungen ergibt nämlich, daß für jedes Schrittweitenverhältnis die Stabilitätsbedingung verletzt ist ([46, S.123 ff.]), sodaß

man in der Praxis vor der unbefriedigenden Alternative zwischen extrem ungenauen oder stark oszillierenden Kontrollen steht. Hinzukommt, daß sich keine Kontrollrestriktionen berücksichtigen lassen.

1.2 Übersicht über die folgenden Kapitel

Die bisher besprochenen Computer-fähigen Verfahren sind gekennzeichnet durch einen vergleichsweise hohen Aufwand pro Iteration bei geringer Konvergenzgeschwindigkeit (Gebietsidentifikation durch projizierte Gradientenverfahren) und/oder durch die Minimierung eines u.U. inadéquaten Funktional, das nur bei exakter Kontrollierbarkeit (d.h. Lösbarkeit des ISP) gute Approximationen für den gewünschten Rand $\tilde{S}$ erzeugt ([1,2,3]).

Darüberhinaus erzwingen die infolge der inkorrekten Aufgabenstellung auftretenden Stabilitätsprobleme weitgehende Regularisierungsmaßnahmen, z.B. Einschränkungen an die Ableitung $\dot{g}$ ([64]), was den Rechenaufwand der besprochenen Minimierungsverfahren zusätzlich erhöht.

Unser Ziel war es daher, einen Algorithmus zu entwickeln, der das "richtige" Funktional, nämlich den Abstand (gemessen in irgend einer Norm) zwischen dem gewünschten Rand und der Menge der approximierenden Ränder mit hoher Konvergenzordnung minimiert, und zwar unabhängig von eventuell auferlegten Kontrollrestriktionen.

Wir formulieren deshalb das ISP als nichtlineares Approximationsproblem,

Suche ein $g^* \in A$, sodaß

$$(1.2.1) \quad \|\tilde{S} - S(g^*)\| = \inf\{\|\tilde{S} - S(g)\| \mid g \in A\},$$

(S wie im 1. Abschnitt, A = Bereich der zulässigen Kontrollen)

und lösen dieses (in Kapitel 4) numerisch mit einem erst in jüngerer Zeit entwickelten, sehr effektiven, Newton-ähnlichen Verfahren (Osborne-Watson [60,59], Cromme [28,26]). Dazu benötigen wir die Frechet-Ableitung des nichtlinearen Operators $S: B \rightarrow B$, $B=(C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$, deren Existenz und Lipschitz-Stetigkeit wir im ersten Kapitel durch scharfe a-priori-Abschätzungen der Lösungen FRWPe nachweisen.

Im ersten Abschnitt des zweiten Kapitels behandeln wir kurz das L_2 -Approximationsproblem und untersuchen in den folgenden Abschnitten eingehend das L_∞ -Approximationsproblem. Es gelingt uns, für endlichdimensionales A die Existenz einer besten Approximation $s^*=S(g^*)$ zu zeigen und diese unter stärkeren Voraussetzungen (i.w. A "haarsch") durch Alternanteneigenschaften zu charakterisieren. Den Schlüssel für den Charakterisierungssatz liefert dabei eine Aussage über die Nullstellen der Differenz zweier Ränder, bei deren Beweis die parabolische Version des "Hopfschen Lemmas" eine entscheidende Rolle spielt.

Mit dem Nachweis der "starken Eindeutigkeit" der besten Approximation sind dann alle Voraussetzungen zu einem Konvergenzsatz erfüllt, der die quadratische Konvergenz des oben genannten Verfahrens beinhaltet und von Cromme [25] kürzlich bewiesen wurde.

In Kapitel 4 untersuchen wir die numerischen Aspekte des Osborne-Watson-Verfahrens und demonstrieren anhand gerechneter Beispiele seine Effektivität.

Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin danke ich herzlich für die wohlwollende Unterstützung und das stete Interesse am Fortgang der Arbeit.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. K.-H. Hoffmann und Herrn Dr. E. Schäfer für die zahlreichen, anregenden Diskussionen.

II. Analysis

Wir befassen uns in diesem Kapitel mit den analytischen Eigenschaften des freien Randwertproblems (1.1.1-5), wie der Glattheit der Lösungen, ihrer stetigen Abhängigkeit von den Randdaten etc., und erhalten in den Abschnitten 5,6 und 7 als wichtigstes Ergebnis die Lipschitz-stetige Frechet-Differenzierbarkeit des Lösungsoperators (der jeder Kontrolle g den zugehörigen freien Rand zuordnet) unter zusätzlichen Randkompatibilitätsforderungen an die Anfangsfunktion f . Wir legen dabei unseren Betrachtungen der Übersichtlichkeit halber ein typisches Modellproblem zugrunde und gehen erst in den Abschnitten 8 und 9 auf Verallgemeinerungen ein.

Für die Ergebnisse in den Abschnitten 3 bis 10 benötigen wir eine Reihe bekannter Aussagen über die Lösungen freier Randwertprobleme, die wir der Vollständigkeit halber im 1. Abschnitt darstellen. Darüberhinausgehende, zum Teil rein technische Lemmata werden im 2. Abschnitt bewiesen. Die Beweise der Abschnitte 1 und 2 können beim ersten Durchlesen übergangen werden, es wird im Bedarfsfall auf die einzelnen Aussagen verwiesen.

2.1 Bekannte Eigenschaften von Lösungen freier Randwertprobleme

Gegeben sei das freie Randwertproblem (FRWP):

$$(2.1.1) \quad Lu(x,t) := (u_{xx} - u_t)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q(s),$$

$$(2.1.2) \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq b = s(0) < \infty,$$

$$(2.1.3) \quad u_x(0,t) = g(t),$$

$$(2.1.4) \quad u(s(t),t) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 0 < t \leq T.$$

$$(2.1.5) \quad u_x(s(t),t) = -\dot{s}(t), \quad s(0) = b,$$

Dabei sei $\Omega(s)$ das Gebiet:

$$\Omega(s) := \{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < s(t), 0 < t \leq T \}$$

Unter einer (klassischen) Lösung von (2.1.1-5) verstehen wir ein Funktionenpaar (u,s) mit den folgenden Eigenschaften:

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} & a) \quad u \in C^2(\Omega(s)) \cap C(\bar{\Omega}(s)), \quad u \text{ erfüllt (2.1.1-4)}, \\ & b) \quad s \in C^1[0,T], \quad s \text{ genügt dem Anfangswertproblem (2.1.5)}. \end{aligned}$$

Mit diesem Lösungsbegriff erhält man durch Integration von $Lu = 0$ über $\Omega(s)$ und Einsetzen der Randbedingungen (2.1.2-5) eine Integralgleichung für s :

$$(2.1.7) \quad s(t) = s(0) - \int_0^t g(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} u(x,t) dx + \int_0^{s(0)} f(x) dx.$$

Die Voraussetzungen

$$(2.1.8) \quad \begin{aligned} & f \in C^1[0,b], \quad f \geq 0, \quad f(b) = 0, \\ & g \in C[0,T], \quad g \leq 0, \end{aligned}$$

sind hinreichend für die Aussagen der folgenden Lemmata.

(2.1.9) Lemma: (Existenz, Eindeutigkeit, Glattheit)

Es existiert genau eine Lösung (u,s) von (2.1.1-5) und diese hat die Eigenschaften:

$$(2.1.10) \quad \dot{s} \geq 0, \quad u \geq 0, \quad s \in C^{3/2}[0,T] \cap C^\infty(0,T).$$

Außerdem ist u für $t > 0$ auch auf dem Rand s beliebig oft stetig differenzierbar und genügt dort der Gleichung $Lu = 0$. Es gelten die Abschätzungen:

$$(2.1.11) \quad \bigwedge_{0 \leq t \leq T} \|\dot{s}\|_t \leq A(t), \quad \sup_{\substack{0 \leq x \leq s(\tau) \\ 0 \leq \tau \leq t}} |u_x(x,\tau)| \leq A(t),$$

wobei $\|\dot{s}\|_t := \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\dot{s}(\tau)|$ und $A(t) = \max(\|g\|_t, \|f'\|_b)$ ist.

Beweis:

Existenz, Eindeutigkeit und Monotonie des freien Randes wurden von Friedman [34,37] und Cannon, Primicerio [17] gezeigt. Das Ergebnis $s \in C^{3/2}[0,T]$ stammt von Friedman [39], die unendliche Differenzierbarkeit von s auf dem halboffenen Intervall $(0,T]$ zunächst von Cannon und Hill [15] und wurde später von Schaeffer [67] sehr elegant (induktiv) bewiesen. (2.1.11) wird ebenfalls in [17] gezeigt.

**

Die Voraussetzungen (2.1.8) sind stärker als es zum Beweis von Lemma (2.1.9) notwendig ist. Analoge Aussagen unter schwächeren Voraussetzungen findet man in [17], Aussagen über schwache Lösungen bei u.U. nichtmonotonen Rändern bei Friedman [38] und Magenes [54]. Da wir jedoch im 2. Abschnitt die Bedingungen an f noch weiter verschärfen, setzen wir ab jetzt (2.1.8) voraus.

(2.1.12) Lemma: (Stabilität, monotone Abhängigkeit)

Seien für $i = 1, 2$ f_i, g_i Datenfunktionen und $b_2 \geq b_1$. Dann gilt für die zugehörigen Ränder s_i :

$$(2.1.13) \quad \bigvee_{\substack{C > 0 \\ C = C(T)}} \quad \bigwedge_{0 \leq t \leq T} |s_2(t) - s_1(t)| \leq C [b_2 - b_1 + \int_0^t |g_2(\tau) - g_1(\tau)| d\tau + \int_0^{b_1} |f_2(x) - f_1(x)| dx + \int_{b_1}^{b_2} f_2(x) dx] .$$

$$(2.1.14) \quad f_2 \geq f_1, \quad g_2 \leq g_1 \quad \Rightarrow \quad s_2 \geq s_1 .$$

Beweis: Bei Cannon und Primicerio [17] .

**

Am Ende dieses Abschnitts zitieren wir noch drei technische Lemmata, die wir in den Abschnitten 5, 6 und 7 benötigen:

(2.1.15) Lemma: (Sprungrelation)

Sei $s \in C^1[0, T]$, $s(0) = b$, $\mu \in C[0, T]$ und

$$(2.1.16) \quad K(x, t, \xi, \tau) := \frac{1}{2\pi^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right\}, \quad t > \tau,$$

die Singularitätenfunktion der Wärmeleitungsgleichung (WLG).
Dann gilt:

$$(2.1.17) \quad \lim_{x \rightarrow s(t)-0} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \mu(\tau) K(x, t, s(\tau), \tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \mu(t) + \int_0^t \mu(\tau) K_x(s(t), t, s(\tau), \tau) d\tau.$$

Beweis: Bei Friedman, Lemma 1 in [34].

**

(2.1.18) Lemma: (Lösungsdarstellung)

Sei $s \in C^1[0, T]$, $s(0) = b$, $s > 0$, eine gegebene Funktion, und y erfülle in $\Omega(s)$ $Ly = 0$. Dann besitzt y , falls $y_x(s(\cdot), \cdot) \in C[0, T]$ ist, die Darstellungen:

$$(2.1.19) \quad y(x, t) = - \int_0^t N_x(x, t, 0, \tau) y(0, \tau) d\tau + \int_0^{s(0)} G(x, t, \xi, 0) y(\xi, 0) d\xi$$

$$+ \int_0^t N(x, t, s(\tau), \tau) [s(\tau) y(s(\tau), \tau) + y_x(s(\tau), \tau)] d\tau +$$

$$+ \int_0^t N_x(x, t, s(\tau), \tau) y(s(\tau), \tau) d\tau.$$

$$(2.1.20) \quad y(x, t) = - \int_0^t N(x, t, 0, \tau) y_x(0, \tau) d\tau + \int_0^{s(0)} N(x, t, \xi, 0) y(\xi, 0) d\xi$$

$$+ \int_0^t N(x, t, s(\tau), \tau) [s(\tau) y(s(\tau), \tau) + y_x(s(\tau), \tau)] d\tau +$$

$$+ \int_0^t G_x(x, t, s(\tau), \tau) y(s(\tau), \tau) d\tau, \quad \text{wobei}$$

$$(2.1.21) \quad \begin{aligned} G(x, t, \xi, \tau) &:= K(x, t, \xi, \tau) - K(-x, t, \xi, \tau), \\ N(x, t, \xi, \tau) &:= K(x, t, \xi, \tau) + K(-x, t, \xi, \tau). \end{aligned}$$

Beweis:

Man integriere die Greensche Identität

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} [G(x, t, \xi, \tau) y_\xi(\xi, \tau) - y(\xi, \tau) G_\xi(x, t, \xi, \tau)] - \frac{\partial}{\partial \tau} [G(x, t, \xi, \tau) \cdot \\ \cdot y(\xi, \tau)] = 0 \end{aligned}$$

über das Gebiet $0 < \xi < s(\tau)$, $0 < \epsilon < \tau < t - \epsilon$ und bilde den Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ (Sherman [68], Friedman [34]).

**

Die Darstellung (2.1.19) eignet sich, falls auf der t -Achse Dirichlet-Daten, die Darstellung (2.1.20), falls auf der t -Achse Neumann-Daten vorliegen (die Funktionen G und N sind gerade die Greensche bzw. die Neumannsche Funktion der WLГ für die Halbebene $\{x \geq 0\}$).

Abschließend zitieren wir noch eine schwächere Version des bekannten Gronwall-Lemmas:

(2.1.22) Lemma: (Gronwall)

Seien $r, \gamma \in C[0, T]$, $h \in L_1[0, T]$, $h \geq 0$, und es sei

$$(2.1.23) \quad \bigwedge_{0 \leq t \leq T} \gamma(t) \leq r(t) + \int_0^t h(\tau) \gamma(\tau) d\tau.$$

Dann gilt mit $H(t) := \int_0^t h(\tau) d\tau$ die Abschätzung:

$$(2.1.24) \quad \bigwedge_{0 \leq t \leq T} \gamma(t) \leq r(t) + \int_0^t r(\tau) h(\tau) e^{H(t) - H(\tau)} d\tau.$$

Beweis: In Walter [71, S. 13] .

**

2.2 A-priori-Abschätzungen

Wir beweisen in diesem Abschnitt Aussagen, die die Abschätzungen aus den Lemmata (2.1.9) und (2.1.12) zum Teil verschärfen. Allerdings benötigen wir dazu zusätzliche Glattheits- und Kompatibilitätsbedingungen an die Anfangsfunktion f .

(2.2.1) Lemma:

Sei $f \in C^2[0, b]$ und $f''(b) = [f'(b)]^2$. Dann gilt für die Lösung (u, s) von (2.1.1-5):

$$(2.2.2) \quad \sup \{ |u_{xx}(x, t)| \mid \frac{b}{2} \leq x < s(t), 0 < t \leq T \} \leq C ,$$

wobei C nur von $\|f'\|_b$, $\|f''\|_b$, b und $\|g\|_T$, nicht aber von $\dot{g}$ abhängt. Gilt die zusätzliche Kompatibilitätsbedingung

$$(2.2.3) \quad f \in C^4[0, b], \quad f^{(4)}(b) = -2[f''(b)]^2 + 3f'(b)f^{(3)}(b) ,$$

so ist sogar $s \in C^\infty(0, T] \cap C^2[0, T]$.

Beweis:

Wir zeigen zuerst (2.2.2). Zur Darstellung der Lösung u von (2.1.1-5) verwenden wir die Gleichung (2.1.20) und setzen die Randbedingungen ein:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & - \int_0^t N(x, t, 0, \tau) g(\tau) d\tau - \int_0^t N(x, t, s(\tau), \tau) \dot{s}(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^b N(x, t, \xi, 0) f(\xi) d\xi . \end{aligned}$$

Für $(x, t) \in \Omega(s)$ sind die Integranden beliebig oft stetig nach x und t differenzierbar. Wir leiten nach x ab und integrieren unter dem letzten Integral partiell:

$$(2.2.4) \quad u_x(x, t) = - \int_0^t N_x(x, t, 0, \tau) g(\tau) d\tau - \int_0^t N_x(x, t, s(\tau), \tau) \dot{s}(\tau) d\tau - \\ - G(x, t, b, 0) f(b) + G(x, t, 0, 0) f(0) + \int_0^b G(x, t, \xi, 0) f'(\xi) d\xi .$$

Dabei haben wir die Beziehung $N_x = -G_\xi$ verwendet. Wir differenzieren nochmals nach x und benutzen $f(b)=0$, $G(x, t, 0, 0)=0$ und $G_x = -N_\xi$:

$$u_{xx}(x, t) = - \int_0^t N_{xx}(x, t, 0, \tau) g(\tau) d\tau - \int_0^t N_{xx}(x, t, s(\tau), \tau) \dot{s}(\tau) d\tau - \\ - N'(x, t, b, 0) f'(b) + N'(x, t, 0, 0) f'(0) + \int_0^b N(x, t, \xi, 0) f''(\xi) d\xi .$$

Mit dieser Gleichung schätzen wir $|u_{xx}(\frac{b}{2}, t)|$ ab:

$$(2.2.5) \quad |u_{xx}(\frac{b}{2}, t)| \leq \|g\|_t \int_0^t |N_\tau(\frac{b}{2}, t, 0, \tau)| d\tau + \|\dot{s}\|_t \cdot \\ \cdot \int_0^t |N_\tau(\frac{b}{2}, t, s(\tau), \tau)| d\tau + \|f'\|_b (|N(\frac{b}{2}, t, b, 0)| + |N(\frac{b}{2}, t, 0, 0)|) + \\ \|f''\|_b \int_0^b |N(\frac{b}{2}, t, \xi, 0)| d\xi =: \sum_{i=1}^4 V_i(t) .$$

$$N_\tau(x, t, \xi, \tau) = K_\tau(x, t, \xi, \tau) + K_\tau(-x, t, \xi, \tau) \quad \text{und}$$

$|K_\tau(x, t, \xi, \tau)| \leq C_1(t-\tau)^{-5/2} \exp\{\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\}$, wobei C_1 nur von einer oberen Schranke für $s(t)$ und damit wegen (2.1.11) nur von $\|g\|_T$ und $\|f'\|_b$ abhängt. Infolge der Monotonie von s ist $s(t) \geq b$ und die Integranden von V_1 und V_2 lassen sich abschätzen:

$$(2.2.6) \quad |N_\tau(\frac{b}{2}, t, 0, \tau)| = 2|K_\tau(\frac{b}{2}, t, 0, \tau)| \leq \frac{2C_1}{(t-\tau)^{5/2}} \exp\{\frac{-b^2}{16(t-\tau)}\} \\ |N_\tau(\frac{b}{2}, t, s(\tau), \tau)| \leq \frac{2C_1}{(t-\tau)^{5/2}} \exp\{\frac{-b^2}{16(t-\tau)}\} .$$

Wir bestimmen das Maximum der Funktion $g_{\alpha,M}(x) := x^{-\alpha} \exp\{\frac{-M}{x}\}$:

$$g'_{\alpha,M}(x) = [-\alpha x^{-(\alpha+1)} + Mx^{-(\alpha+2)}] \exp\{\frac{-M}{x}\} = x^{-(\alpha+2)} \exp\{\frac{-M}{x}\} \cdot$$

$$[-\alpha x + M] = 0 ! \implies x_{\max} = \frac{M}{\alpha} \implies$$

$$g_{\alpha,M}(x) \leq g_{\alpha,M}(\frac{M}{\alpha}) = (\frac{\alpha}{M})^{\alpha} \exp\{-\alpha\} = (\frac{\alpha}{eM})^{\alpha} . \implies$$

$$(2.2.7) \quad \text{Für } \xi=0, s(\tau) : |N_{\tau}(\frac{b}{2}, t, \xi, \tau)| \leq 2C_1(\frac{4}{b})^5 =: C_2$$

Die übrigen Terme werden analog abgeschätzt:

$$(2.2.8) \quad |N(\frac{b}{2}, t, b, 0)| + |N(\frac{b}{2}, t, 0, 0)| \leq 4K(\frac{b}{2}, t, b, 0) \leq \frac{2}{b} =: C_3$$

$$\int_0^b K(\frac{b}{2}, t, \xi, 0) d\xi = (4\pi t)^{-1/2} \int_0^b \exp\{\frac{-(\frac{b}{2} - \xi)^2}{4t}\} d\xi =$$

$$= -\pi^{-1/2} \int_{\frac{b}{4t}^{1/2}}^{\frac{-b}{4t}^{1/2}} \exp\{-\eta^2\} d\eta \leq \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\eta^2\} d\eta = 1 . \implies$$

$$(2.2.9) \quad \int_0^b |N(\frac{b}{4}, t, \tau, 0)| d\tau \leq \dots$$

Setzen wir die Ungleichungen (2.2.7-9) in (2.2.5) ein, so erhalten wir:

$$(2.2.10) \quad |u_{xx}(\frac{1}{4}, t)| \leq C_1 \left(\|f''\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)} + \|f'''\|_{p(\cdot)} + \|f'''\|_{p(\cdot)} \right) =: C_4$$

Wegen (2.1.11) hängt C_4 nur von $T, b, \|f\|_{p(\cdot)}, \|f''\|_{p(\cdot)}$ und $\|f'''\|_{p(\cdot)}$ ab. Sei D das Gebiet $D := \{(x, t) \in \Omega(s) \mid x > \frac{b}{2}\}$. Um in $\bar{D}$ das Maximumprinzip (MP) auf u_{xx} anwenden zu können, müssen wir

$|u_{xx}|$ auf dem Rest des parabolischen Randes von D abschätzen und die Beschränktheit von $|u_{xx}|$ im Punkt $(b,0)$ nachweisen.

$$(2.2.11) \quad |u_{xx}(x,0)| = |f''(x)| \leq \|f''\|_b \leq C_4.$$

Für $t > 0$ dürfen wir wegen Lemma (2.1.9) die Gleichung $u(s(t), t) = 0$ nach t differenzieren:

$$(2.2.12) \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} u(s(t), t) = \dot{s}(t) u_x(s(t), t) + u_t(s(t), t) = \\ &= -\dot{s}^2(t) + u_{xx}(s(t), t). \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$(2.2.13) \quad |u_{xx}(s(t), t)| = |\dot{s}^2(t)| \leq \|\dot{s}\|_t^2 \leq C_5.$$

Die Stetigkeit von u_{xx} im Punkt $(b,0)$ liefert (2.2.12) zusammen mit der Voraussetzung $f''(b) = [f'(b)]^2$. Außerdem gilt in D $Lu_{xx} = 0$. Aus den Ungleichungen (2.2.10, 11, 13) folgt nun mit Hilfe des Maximumprinzips die Behauptung (2.2.2), wobei $C = \max(C_4, C_5)$ ist. Um $s \in C^2[0, T]$ nachzuweisen, differenzieren wir für $t > 0$ die freie Randbedingung (2.1.5):

$$\ddot{s}(t) = -\dot{s}(t) u_{xx}(s(t), t) - u_{xt}(s(t), t) = -\dot{s}^3(t) - u_{xt}(s(t), t).$$

Nochmalige Differentiation von (2.2.12) liefert:

$$2\dot{s}(t)\ddot{s}(t) = \dot{s}(t) u_{xt}(s(t), t) + u_{tt}(s(t), t) \implies$$

$$-2\dot{s}^4(t) - 3\dot{s}(t) u_{xt}(s(t), t) - u_{tt}(s(t), t) = 0 \implies \text{(wegen (2.2.12))}$$

$$[u_{xxxx} - 3u_x u_{xxx} + 2u_{xx}^2](s(t), t) = 0 \text{ für } t > 0.$$

u_{xxx} und u_{xxxx} lassen sich deshalb bis $t=0$ fortsetzen und sind dort stetig, falls (2.2.3) erfüllt ist. Damit ist $\ddot{s}$ für $t=0$ stetig. Das war zu zeigen.

Die in Lemma (2.1.12) festgestellte Lipschitz-stetige Abhängigkeit des Randes von den Randdaten, kann bezüglich der Randvorgabe g auf die Ableitung $\dot{s}$ erweitert werden. Dies ist die Aussage des nächsten Lemmas.

(2.2.14) Lemma:

Seien g_1 und g_2 (bei festem f) zwei Datenfunktionen, die den Voraussetzungen (2.1.8) genügen. Dann gilt für die korrespondierenden Ränder s_1 und s_2 :

$$(2.2.15) \quad \bigwedge_{0 \leq t \leq T} \|\dot{s}_2 - \dot{s}_1\|_t \leq C \|g_2 - g_1\|_t$$

wobei C nur von T , b , $\|f'\|_b$ und einer oberen Schranke für $\|g_1\|_T$ und $\|g_2\|_T$ abhängt.

Beweis:

Wir verwenden Gleichung (2.2.4) zur Herleitung einer Volterraschen Integralgleichung für die Funktion $\dot{s}$. Beim Grenzübergang $x \rightarrow s(t)$ in (2.2.4) haben wir die Sprungrelation (2.1.17) im zweiten Integral zu beachten, die übrigen Terme auf der rechten Seite sind stetig, da die Integranden in den Punkten $(s(t), t)$ stetig sind. Ersetzen wir noch $u_x(s(t), t)$ durch $-\dot{s}(t)$ und fassen zusammen, so ergibt sich nach Multiplikation mit 2 :

$$(2.2.16) \quad \dot{s}(t) = 2 \int_0^t N_x(s(t), t, 0, \tau) g(\tau) d\tau + \\ + 2 \int_0^t N_x(s(t), t, s(\tau), \tau) \dot{s}(\tau) d\tau - 2 \int_0^b G(s(t), t, \xi, 0) f'(\xi) d\xi .$$

Seien jetzt s_1 und s_2 die zu g_1 und g_2 gehörigen Ränder und $\Delta s := s_2 - s_1$, $\Delta g := g_2 - g_1$. Dann folgt aus (2.2.16) für die Differenz Δs der beiden Ränder nach Einschreiben der gemischten Terme:

$$\begin{aligned}
 (2.2.17) \quad \Delta \hat{s}(t) &= 2 \int_0^t g_1(\tau) [N_x(s_2(t), t, 0, \tau) - N_x(s_1(t), t, 0, \tau)] d\tau + \\
 &+ 2 \int_0^t \Delta g(\tau) N_x(s_2(t), t, 0, \tau) d\tau + \\
 &+ 2 \int_0^t \hat{s}(\tau) [N_x(s_2(t), t, s_2(\tau), \tau) - N_x(s_1(t), t, s_1(\tau), \tau)] d\tau + \\
 &+ 2 \int_0^t \Delta \hat{s}(\tau) N_x(s_2(t), t, s_2(\tau), \tau) d\tau - \\
 &- 2 \int_0^b f'(\xi) [G(s_2(t), t, \xi, 0) - G(s_1(t), t, \xi, 0)] d\xi = \\
 &=: \sum_{i=1}^5 V_i(t) .
 \end{aligned}$$

Wir schätzen die V_i der Reihe nach ab:

$$N_x(x, t, 0, \tau) = \frac{-x}{2\pi^{1/2}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{\frac{-x^2}{4(t-\tau)}\right\} .$$

Wegen $s_1, s_2 \geq b > 0$ besitzt damit der Integrand von V_1 keine Singularität und ist beliebig oft stetig differenzierbar. Die Anwendung des Mittelwertsatzes liefert mit einem geeigneten $\zeta(t) \in (s_1(t), s_2(t))$ folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
 (2.2.18) \quad |V_1(t)| &= 2 \left| \int_0^t g_1(\tau) N_{xx}(\zeta(t), t, 0, \tau) (s_2(t) - s_1(t)) d\tau \right| \leq \\
 &\leq 2t \|g_1\|_t \|\Delta s\|_t \sup_{0 \leq \tau \leq t} |N_{xx}(\zeta(t), t, 0, \tau)| \leq \\
 &\leq A_1 t \|g_1\|_t \|\Delta s\|_t \leq A_2 t \|\Delta g\|_t .
 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus (2.1.13). Der Integrand von V_2 ist stetig wegen $s_2 \geq b > 0$, also gilt:

$$(2.2.19) \quad |V_2(t)| \leq A_3 t \|\Delta g\|_t.$$

Dabei hängen die Konstanten A_i nur von oberen Schranken für $\|s_1\|_T$, $\|s_2\|_T$, $\|g_1\|_T$ und von T und damit wegen (2.1.11) nur von $\|g_1\|_T$, $\|g_2\|_T$, $\|f'\|_b$ und von T ab. Mit solchen Konstanten wird in [34, Abschätzung für V_4 in den Formeln (5.24)-(5.34)] auch V_3 abgeschätzt. Man erhält:

$$(2.2.20) \quad |V_3(t)| \leq A_4 t^{1/2} \|\Delta s\|_t.$$

Für V_4 folgt nach einfacher Rechnung mittels (2.1.11):

$$(2.2.21) \quad |V_4(t)| \leq A_5 \|\Delta s\|_t \|s_2\|_t t^{1/2} \leq A_6 t^{1/2} \|\Delta s\|_t.$$

V_5 wird in [34, (5.22)] abgeschätzt:

$$(2.2.22) \quad |V_5(t)| \leq A_7 \|f'\|_b t^{1/2} \|\Delta s\|_t \leq A_8 t^{1/2} \|\Delta s\|_t.$$

Setze wir die Ungleichungen (2.2.18-22) in Gleichung (2.2.17) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (2.2.23) \quad \|\Delta s\|_t &\leq (A_2 + A_3) t \|\Delta g\|_t + (A_4 + A_6 + A_8) t^{1/2} \|\Delta s\|_t = \\ &=: A t \|\Delta g\|_t + B t^{1/2} \|\Delta s\|_t. \end{aligned}$$

Unter der Einschränkung $t \leq \frac{1}{4B^2}$ impliziert (2.2.23):

$$(2.2.24) \quad \|\Delta s\|_t \leq \frac{A}{2B^2} \|\Delta g\|_t =: C_1 \|\Delta g\|_t.$$

Mit derselben Technik wie in [34] können wir nun die Abschätzung (2.2.24) durch Aneinanderreihung von endlich vielen ϵ -Streifen auf das ganze Intervall $[0, T]$ ausdehnen. Dazu wird das Gebiet $\Omega(s)$ in horizontale Streifen der Breite ϵ_i , $i=1, \dots, N$, zerlegt und in jedem Streifen eine (2.2.24) analoge Abschätzung verwendet. Dazu muß sichergestellt werden, daß die iterierten Anfangsfunktionen $f_i(x) = u(x, t_{i+1})$ durch die gleichen Konstanten beschränkt werden können, wie die Datenfunktionen f und g . Dies wird gerade durch (2.1.11) gewährleistet. Wir erhalten damit die gewünschte Abschätzung (2.2.15) mit der Konstanten $C := \max\{C_i | i=1, \dots, N\}$, wobei die C_i aus den Ungleichungen (2.2.24) auf den einzelnen Streifen stammen.

**

2.3 Darstellung der Frechet-Ableitung

Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein. Seien in Zukunft die Anfangsfunktion $f \geq 0$ fest vorgegeben und

$$(2.3.1) \quad A := \{ g \in C[0, T] \mid \bigwedge_{0 \leq t \leq T} g(t) \leq 0 \} \subset C[0, T]$$

der Definitionsbereich des Lösungsoperators

$$(2.3.2) \quad S : A \rightarrow C[0, T], \quad g \mapsto s,$$

der jeder Randvorgabe g den zugehörigen freien Rand s zuordnet. S ist nach Lemma (2.1.9) wohldefiniert und nach Lemma (2.1.12) sogar Lipschitz-stetig als Operator vom Banachraum $B := (C[0, T], \|\cdot\|_T)$ nach B . Die Implikation (2.1.14) bezeichnen wir in Zukunft als Antitonie von S . Wir wollen S differenzieren und benötigen dazu den Begriff der Frechet-Ableitung.

(2.3.3) Definition:

Sei B der Banachraum $(C[0,T], \|\cdot\|_T)$. Der Operator $S:A \rightarrow B$ heißt in $g \in A$ Frechet-(F-) differenzierbar, falls es eine stetige, lineare Abbildung $S'_g: B \rightarrow B$ und eine unter Umständen von g abhängige Konstante $H > 0$ gibt, mit der Eigenschaft:

$$(2.3.4) \quad \bigwedge_{\substack{h \in B, \\ \|h\|_T \leq H, \quad g+h \in A}} \|S(g+h) - S(g) - S'_g h\|_T = o(\|h\|_T) .$$

S heißt stetig Frechet-differenzierbar auf A , falls S in jedem Punkt $g \in A$ F-differenzierbar ist, und die Abbildung $g \rightarrow S'_g$ bezüglich der induzierten Operatornorm stetig ist.

**

Der Nachweis der F-Differenzierbarkeit von S erfolgt in mehreren Schritten. Wir leiten zunächst ein gekoppeltes Anfangs-Randwertproblem für eine gewöhnliche und eine partielle DGL her, dem die Funktion $S'_g h$, falls sie existiert, notwendig genügen muß. Von dieser Aufgabe werden wir dann in den folgenden Abschnitten die gewünschten Eigenschaften zeigen.

(2.3.5) Satz: (Darstellung von S'_g)

Falls der Lösungsoperator S in einem $g \in A$ F-differenzierbar ist, so genügt die Bildvariation $\delta s := S'_g h$ einer gegebenen Variation $h \in B$ dem folgenden System:

$$(2.3.6) \quad \delta s(t) = - \int_0^t h(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} z(x,t) dx, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$1 \leq x, t \leq 1, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,1),$$

$$z(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq b,$$

$$(2.3.7) \quad \left. \begin{aligned} z_x(0,t) &= h(t), \\ z(s(t),t) &= s(t) \delta s(t), \end{aligned} \right\} \quad 0 < t \leq T,$$

wobei $s = S(g)$ ist.

Beweis:

Wir betrachten die folgende Abbildung $P: B \rightarrow B$,

$$h \mapsto S'_g h \mapsto w \mapsto - \int_0^{\cdot} h(\tau) d\tau - \int_0^{s(\cdot)} w(x, \cdot) dx =: r,$$

wobei w die Lösung des (festen) Randwertproblems

$$(2.3.8) \quad \begin{aligned} Lw(x, t) &= 0, & (x, t) \in \Omega(s), \\ w(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq b, \\ \left. \begin{aligned} w_x(0, t) &= h(t), \\ w(s(t), t) &= \hat{s}(t)(S'_g h)(t), \end{aligned} \right\} & 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

ist. Die Lösung w existiert wegen $\hat{s} S'_g h \in B$ und ist eindeutig bestimmt (MP). Damit ist P wohldefiniert und wegen der Linearität von S'_g ebenfalls linear, da die Lösung w des Randwertproblems (2.3.8) linear von h abhängt. P ist auch stetig, da S'_g stetig ist, w stetig von den Randbedingungen abhängt (Max.-Prinzip), $\hat{s}$ aus B ist, und die letzte Zuordnung trivialerweise stetig ist. Insgesamt ist P also ein stetiger, linearer Operator von B nach B .

Wenn wir die Abschätzung (2.3.4) für P an Stelle von S'_g nachweisen, folgt aufgrund der Eindeutigkeit der F -Ableitung $P = S'_g$ und damit $r = \delta s$. Seien dazu $\bar{s} := S(g+h)$ und $\Delta s := \bar{s} - s$. Wir haben den Ausdruck $\|\Delta s - r\|_T$ abzuschätzen und verwenden hierzu die Integralgleichung (2.1.7). Um nicht jedesmal in den Teilgebieten, in denen nur eine der beiden Funktionen u und $\bar{u}$ definiert ist, die Bezeichnungen wechseln zu müssen, setzen wir der Einfachheit halber voraus, daß h einerlei Vorzeichen besitzt, z.B. $h \leq 0$, denn dann ist $\bar{s} \geq s$ und $\Omega(s) \subset \Omega(\bar{s})$.

$$(2.3.9) \quad \begin{aligned} \bar{s}(t) - s(t) - r(t) &= - \int_0^t (g+h)(\tau) d\tau + \int_0^t g(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t h(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} [\bar{u} - u - w]'(x, t) dx - \frac{\bar{s}(t)}{s(t)} \int_0^{\bar{s}(t)} \bar{u}(x, t) dx = \end{aligned}$$

$$= - \int_0^{s(t)} [\bar{u} - u - w](x,t) dx - \int_{s(t)}^{\bar{s}(t)} \bar{u}(x,t) dx =: A_1(t) + A_2(t) .$$

Sei $v := \bar{u} - u - w$ in $\Omega(s)$. v genügt dem System:

$$(2.3.10) \quad \begin{aligned} Lv &= 0 \text{ in } \Omega(s) , \quad v(x,0) = 0 , \quad v_x(0,t) = 0 , \\ v(s(t),t) &= \bar{u}(s(t),t) - w(s(t),t) . \end{aligned}$$

Um $\|v\|_{\Omega(s)} := \sup\{|v(x,t)| \mid (x,t) \in \Omega(s)\}$ abzuschätzen, genügt es (wegen des MPs), obere Schranken für $|v(s(t),t)|$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} (2.3.11) \quad v(s(t),t) &= \bar{u}(s(t),t) - w(s(t),t) = \bar{u}(\bar{s}(t),t) - \\ &- \Delta s(t) \bar{u}_x(\bar{s}(t),t) + \frac{1}{2} (\Delta s(t))^2 \bar{u}_{xx}(\zeta(t),t) - \dot{s}(t) (S'_g h)(t) = \\ &= \{\dot{\bar{s}}(t) [\Delta s(t) - (S'_g h)(t)]\} + \{(\dot{\bar{s}}(t) - \dot{s}(t)) (S'_g h)(t)\} + \\ &+ \{\frac{1}{2} (\Delta s(t))^2 \bar{u}_{xx}(\zeta(t),t)\} =: A_3(t) + A_4(t) + A_5(t) . \end{aligned}$$

Dabei ist $\zeta(t) \in (s(t), \bar{s}(t))$. Für $\|h\|_T \leq H$ bleibt $\|\dot{\bar{s}}\|_T$ wegen (2.1.11) gleichmäßig beschränkt. Nach Definition der F-Ableitung (2.3.4) gilt deshalb für den ersten Term A_3 :

$$(2.3.12) \quad \|A_3\|_T \leq \|\dot{\bar{s}}\|_T o(\|h\|_T) = o(\|h\|_T) .$$

Wegen der Stetigkeit von S'_g ist $\|S'_g h\|_T \leq C_1 \|h\|_T$, nach Lemma (2.2.14) $\|\Delta \dot{s}\|_T \leq C_2 \|h\|_T$, also

$$(2.3.13) \quad \|A_4\|_T \leq \|\Delta \dot{s}\|_T \|S'_g h\|_T \leq C_1 C_2 \|h\|_T^2 =: C_3 \|h\|_T^2 .$$

Dabei hängen C_1 , C_2 und C_3 nicht von h (jedoch i.a. von H) ab.

Nach Lemma (2.2.1) gibt es eine Konstante C_4 , die nur von f , b und einer oberen Schranke für $\|g+h\|_T$ abhängt, sodaß $\sup\{|\bar{u}_{xx}(x,t)| \mid \frac{b}{2} < x < \bar{s}(t), 0 < t \leq T\} \leq C_4$ ist. Wegen $\|g+h\|_T \leq \|g\|_T + H$ läßt sich C_4 unabhängig von h wählen, sodaß mit (2.3.13) und (2.1.13) folgt:

$$(2.3.14) \quad \|A_5\|_T \leq \frac{1}{2}C_4\|\Delta s\|_T^2 \leq C_5\|h\|_T^2.$$

Setzen wir (2.3.12-14) in (2.3.11) ein, so erhalten wir:

$$(2.3.15) \quad \|v(s(\cdot), \cdot)\|_T \leq \sum_{i=3}^5 \|A_i\|_T = o(\|h\|_T).$$

Das MP impliziert: $\|v\|_{\Omega(s)} \leq \|v(s(\cdot), \cdot)\|_T$. Damit ergibt sich schließlich für A_1 (siehe (2.3.9)):

$$(2.3.16) \quad \|A_1\|_T \leq \|s\|_T \|v\|_{\Omega(s)} = o(\|h\|_T).$$

A_2 ist einfach abzuschätzen. Wir integrieren einmal partiell:

$$\begin{aligned} A_2(t) &= - \int_{\bar{s}(t)}^{\bar{s}(t)} \bar{u}(x,t) dx = -(x-s(t))\bar{u}(x,t) \Big|_{x=\bar{s}(t)}^{x=\bar{s}(t)} + \\ &+ \int_{s(t)}^{\bar{s}(t)} (x-s(t))\bar{u}_x(x,t) dx = \int_{s(t)}^{\bar{s}(t)} (x-s(t))\bar{u}_x(x,t) dx. \end{aligned}$$

Nach (2.1.11) ist $\|\bar{u}_x\|_{\Omega(\bar{s})} \leq \max(\|g+h\|_T, \|f'\|_b) \leq \max(\|g\|_T + H, \|f'\|_b) =: C_6$. Es folgt:

$$(2.3.17) \quad \|A_2\|_T \leq \frac{1}{2}C_6\|\bar{s}-s\|_T^2 \leq C_7\|h\|_T^2.$$

Gleichung (2.3.9) und die Relationen (2.3.16,17) ergeben:

$$(2.3.18) \quad \|\bar{s} - s - Ph\|_T \leq \|A_1\|_T + \|A_2\|_T = o(\|h\|_T) .$$

Damit stimmt P mit S'_g und deshalb r mit δs überein. Die Funktion δs erfüllt also die Gleichung (2.3.6). Das war zu zeigen.

**

(2.3.19) Korollar:

Falls unter den Voraussetzungen des Satzes (2.3.5) die Funktion $\delta s \in C^1[0, T]$ ist, ist δs Lösung des Systems:

$$(2.3.20) \quad \begin{aligned} Lz(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega(s), \\ z(x, 0) &= 0, \quad z_x(0, t) = h(t), \quad z(s(t), t) = \dot{s}(t) \delta s(t) \end{aligned}$$

$$(2.3.21) \quad \delta \dot{s}(t) = -\dot{s}^2(t) \delta s(t) - z_x(s(t), t), \quad \delta s(0) = 0 .$$

Beweis:

Wir differenzieren (2.3.6):

$$\begin{aligned} \delta \dot{s}(t) &= -h(t) - \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} z(x, t) dx = -h(t) - \dot{s}(t) z(s(t), t) - \\ &- \int_0^{s(t)} z_t(x, t) dx = -h(t) - \dot{s}^2(t) \delta s(t) - \int_0^{s(t)} z_{xx}(x, t) dx = \\ &= -h(t) - \dot{s}^2(t) \delta s(t) - z_x(s(t), t) + z_x(0, t) = \\ &= -\dot{s}^2(t) \delta s(t) - z_x(s(t), t) . \end{aligned}$$

**

(2.3.22) Korollar:

Die Lösung des gewöhnlichen Anfangswertproblems (2.3.21) lautet:

$$(2.3.23) \quad \delta s(t) = -e^{-K(t)} \int_0^t z_x(s(\tau), \tau) e^{K(\tau)} d\tau ,$$

wobei $K(t) = \int_0^t s^{-1}(\tau) d\tau$ ist.

Beweis: Durch Einsetzen.

**

2.4 Entkopplung des Ableitungssystems

Im Beweis von Satz (2.3.5) mußten wir infolge der Kopplung der Gleichungen (2.3.6,7) bei der Abschätzung der Terme A_3 und A_4 die F-Differenzierbarkeit von S voraussetzen, um eine Charakterisierung der Ableitung S'_g durch das System (2.3.6,7) zu erhalten. Das Bestehen der Gleichungen (2.3.6,7) stellt also eine notwendige Bedingung für die F-Differenzierbarkeit des Operators S dar.

Der Beweis der Umkehrung, nämlich der Aussage, daß der Lösungsoperator $h \mapsto \delta s$ des Systems (2.3.6,7) wohldefiniert, linear und stetig ist und der Beziehung (2.3.4) genügt, gestaltet sich komplizierter und wird in mehreren Schritten vollzogen.

Ein entscheidendes Hilfsmittel ist die zunächst überraschende Erkenntnis, daß sich die Gleichungen (2.3.6,7) durch eine geeignete Transformation der abhängigen Variablen z entkoppeln lassen, denn die Gleichungen (2.1.1-5) lassen sich nicht entkoppeln, und die Struktur der Probleme (2.3.20,21) und (2.1.1-5) scheint auf den ersten Blick sehr ähnlich zu sein. Der prinzipielle Unterschied besteht darin, daß z die Lösung eines linearen Randwertproblems auf dem durch g bestimmten festen Gebiet $\Omega(S(g))$ ist. Wir verwenden im Folgenden für "feste Randwertprobleme" den Lösungsbegriff (2.1.6a).

(2.4.1) Satz: (Entkopplung)

Das Paar $(z, \delta s)$ ist genau dann Lösung des Systems (2.3.6,7), wenn $(y, \delta s)$ Lösung des folgenden Systems ist:

$$Ly(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega(s),$$

$$y(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq b,$$

$$(2.4.2) \quad \left. \begin{aligned} y(0,t) &= - \int_0^t h(\tau) d\tau, \\ \dot{s}(t)y(s(t),t) + y_x(s(t),t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad 0 < t < T,$$

$$(2.4.3) \quad \delta s(t) = y(s(t),t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Beweis:

Wir transformieren z in

$$(2.4.4) \quad y(x,t) := - \int_0^x z(\xi,t) d\xi - \int_0^t h(\tau) d\tau, \quad (x,t) \in \Omega(s).$$

Sei zunächst $(z, \delta s)$ Lösung von (2.3.6,7). Dann ist y auf $\bar{\Omega}(s)$ wohldefiniert, und wir dürfen in $\Omega(s)$ differenzieren:

$$\begin{aligned} y_t(x,t) &= - \int_0^x z_{\xi\xi}(\xi,t) d\xi - h(t) = -z_x(x,t) + z_x(0,t) - h(t) = \\ &= -z_x(x,t) = y_{xx}(x,t). \quad \Rightarrow \quad Ly = 0. \end{aligned}$$

Die Erfüllung der Randbedingungen wird ebenso nachgerechnet:

$$y(x,0) = - \int_0^x z(\xi,0) d\xi = 0; \quad y(0,t) = - \int_0^t h(\tau) d\tau.$$

$$\dot{s}(t)y(s(t),t) + y_x(s(t),t) = -\dot{s}(t) \left[\int_0^{s(t)} z(x,t) dx + \int_0^t h(\tau) d\tau \right] -$$

$$- z(s(t),t) = \dot{s}(t)\delta s(t) - z(s(t),t) = 0.$$

$$\delta s(t) = - \int_0^t h(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} z(\xi,t) d\xi = y(s(t),t).$$

Damit genügt $(y, \delta s)$ den Gleichungen (2.4.2,3).

Die Umkehrtransformation von (2.4.4) lautet: $z := -y_x$. Wir haben zuerst nachzuprüfen, ob z auf $\bar{\Omega}(s)$ wohldefiniert, d.h., ob $z \in C(\bar{\Omega}(s))$ ist. Trivialerweise ist $z \in C(\Omega(s))$ und es gilt: $y_x(s(\cdot), \cdot) = -\dot{s}y(s(\cdot), \cdot) \in C[0, T]$ und

$$\lim_{t \rightarrow 0} y_x(s(t), t) = -\lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}(t)y(s(t), t) = \dot{s}(0)y(b, 0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow b} y_x(x, 0) = 0.$$

y_x ist also im Punkt $(b, 0)$ stetig. Auf der t -Achse ist y sogar differenzierbar, sodaß wir nachrechnen können:

$$Lz = Ly_x = 0 \text{ in } \Omega(s), \quad z_x(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} y_{xx}(x, t) = 0,$$

$$z_x(0, t) = \lim_{x \rightarrow 0_+} z_x(x, t) = -\lim_{x \rightarrow 0_+} y_{xx}(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0_+} y_t(x, t) = h(t).$$

$$z(s(t), t) = -y_x(s(t), t) = \dot{s}(t)y(s(t), t) = \dot{s}(t)\delta s(t).$$

$$-\int_0^{s(t)} z(x, t) dx = \int_0^{s(t)} y_x(x, t) dx = y(s(t), t) - y(0, t) =$$

$$\Rightarrow \delta s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau.$$

z erfüllt also alle Randbedingungen und Satz (2.4.1) ist bewiesen.

**

Transformationen der Form (2.4.4), bei denen Stammfunktionen von Lösungen FRWPe betrachtet werden, wurden zuerst von Baiocchi[3] auf elliptische FRWPe angewendet und später auch von anderen Autoren, z.B. Duvaut [31], zur Glättung von Lösungen parabolischer FRWPe herangezogen. Solchermaßen regularisierte FRWPe lassen sich als Variations- oder Quasivariationsungleichungen formulieren (siehe z.B. Lions-Stampacchia [53], Duvaut [31], Magenes [54]). Wir wollen darauf jedoch nicht eingehen.

2.5 Existenz einer eindeutigen Lösung δs

Das Randwertproblem (2.4.2) hängt nicht mehr von δs ab und kann daher separat behandelt werden. Allerdings läßt sich der Entkopplungstrick (2.4.4) nur für Neumann-Daten auf der t -Achse durchführen. Für das Randwertproblem (2.4.2) kann die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung mit Standardsätzen ([36]) beantwortet werden, wie der folgende Satz zeigt. Für den Nachweis der Differenzierbarkeit von δs sind allerdings diffizilere Überlegungen erforderlich.

(2.5.1) Satz: (Existenz, Eindeutigkeit von δs)

Sei $g \in A$, $f \in C^1[0, b]$ und $s = S(g)$. Dann gilt:

- a) Zu jeder Funktion $h \in B$ existiert genau eine Funktion $\delta s \in B$, die dem System (2.4.2,3) oder, äquivalent dazu, dem System (2.3.6,7) genügt.
- b) Sind zusätzlich die Kompatibilitätsbedingungen (2.2.3) erfüllt, so ist δs sogar aus $C^1[0, T]$ und genügt dem gewöhnlichen Anfangswertproblem (2.3.21). δs läßt sich dann als die eindeutig bestimmte Lösung des Systems (2.3.20,21) berechnen.

Beweis:

a) Die Funktion $H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$ ist aus $C^1[0, T]$ und es ist $H(0)=0$. Nach Satz (2.3.10) ist $s \in C^{3/2}[0, T]$ und die Randbedingung $\hat{s}(t)y(s(t), t) + y_x(s(t), t) = 0$ entspricht genau der Randbedingung (3.3) in Friedman [36, S. 144]. In der dortigen Nomenklatur ist $\psi=0$. Die Transformation $r = x/s(t)$ und eine geringfügige Modifikation (wegen $y(0, t)$) von Theorem 2 aus [36, S. 144] liefern die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung y des Randwertproblems (2.4.2). Da die gemischte Randbedingung $\hat{s}y + y_x = 0$ auch im Punkt $(s(0), 0)$ erfüllt ist, gilt: $\delta s = y(s(\cdot), \cdot) \in C[0, T]$. Daß die Lösbarkeit von (2.4.2) mit der von (2.3.6,7) äquivalent ist, war gerade die Aussage von Satz (2.4.1).

b) Wir haben die Differenzierbarkeit von δs zu zeigen. Wir leiten dazu eine singuläre Integralgleichung für die Funktion $z_x(s(t), t)$ her.

Aus Voraussetzung (2.2.3) folgt nach Lemma (2.2.1) $s \in C^2[0, T]$. Nach a) besitzt (2.3.6, 7) eine auf $\bar{\Omega}(s)$ stetige Lösung z . Falls z hinreichend glatt ist (was ja gezeigt werden soll!), besitzt es in $\Omega(s)$ nach Formel (2.1.20) die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} z(x, t) &= - \int_0^t N_x(x, t, 0, \tau) h(\tau) d\tau + \int_0^t N(x, t, s(\tau), \tau) z_x(s(\tau), \tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t G_x(x, t, s(\tau), \tau) z(s(\tau), \tau) d\tau + \int_0^t N(x, t, s(\tau), \tau) z(s(\tau), \tau) \dot{s}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Wir setzen zur Herleitung der Integralgleichung zunächst die Stetigkeit von $z_x(s(\cdot), \cdot)$ und damit wegen (2.3.21) die von $\delta \dot{s}$ voraus und erhalten schließlich eine Gleichung, in der nur noch die Funktion $z_x(s(\cdot), \cdot)$, die Kerne G und N und als Daten die Funktionen s , $\dot{s}$, $\ddot{s}$, h und δs vorkommen. Wir differenzieren dazu die obige Gleichung nach x und benutzen die Identitäten $N_{xx} = -G_{\xi}$ und $G_{xx} = -G_{\xi}$:

$$\begin{aligned} z_x(x, t) &= - \int_0^t N_x(x, t, 0, \tau) h(\tau) d\tau + \int_0^t N_x(x, t, s(\tau), \tau) z_x(s(\tau), \tau) d\tau - \\ &- \int_0^t [G_x(x, t, s(\tau), \tau) + \dot{s}(\tau) G_{\xi}(x, t, s(\tau), \tau)] z(s(\tau), \tau) d\tau = \\ &= - \int_0^t N_x(x, t, 0, \tau) h(\tau) d\tau + \int_0^t N_x(x, t, s(\tau), \tau) z_x(s(\tau), \tau) d\tau - \\ &- \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} [G(x, t, s(\tau), \tau)] \dot{s}(\tau) \delta s(\tau) d\tau = \\ &= - \int_0^t N_x(x, t, 0, \tau) h(\tau) d\tau + \int_0^t N_x(x, t, s(\tau), \tau) z_x(s(\tau), \tau) d\tau - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - G(x, t, s(\tau), \tau) \dot{s}(\tau) \delta s(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t G(x, t, s(\tau), \tau) [\ddot{s} \delta s + \dot{s} \delta \dot{s}] (\tau) d\tau = \\
 & = - \int_0^t N_x(x, t, 0, \tau) h(\tau) d\tau + \int_0^t N_x(x, t, s(\tau), \tau) z_x(s(\tau), \tau) d\tau + \\
 & + \int_0^t G(x, t, s(\tau), \tau) [\ddot{s}(\tau) \delta s(\tau) - \dot{s}^3(\tau) \delta s(\tau) - \dot{s}(\tau) z_x(s(\tau), \tau)] d\tau .
 \end{aligned}$$

Die letzte Identität folgt aus (2.3.21). Bilden wir den Grenzwert $x \rightarrow s(t)$ und beachten im zweiten Integral nach dem letzten Gleichheitszeichen die Sprungrelation (2.1.17), so ergibt sich nach Multiplikation mit 2 :

$$\begin{aligned}
 (2.5.2) \quad z_x(s(t), t) &= 2 \int_0^t [N_x(s(t), t, s(\tau), \tau) - \dot{s}(\tau) \cdot \\
 &\quad \cdot G(s(t), t, s(\tau), \tau)] z_x(s(\tau), \tau) d\tau = \\
 &= -2 \int_0^t N_x(s(t), t, 0, \tau) h(\tau) d\tau + 2 \int_0^t G(s(t), t, s(\tau), \tau) [\ddot{s} - \dot{s}^3] \delta s(\tau) d\tau .
 \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt (2.5.2) als bestimmende Gleichung für die unbekannte Funktion $\varphi = z_x(s(\cdot), \cdot)$: (2.5.2) ist eine lineare, singuläre Volterrasche Integralgleichung 2. Art für φ , da die Funktionen s , h und δs bekannt sind. Um die Existenz einer eindeutigen, stetigen Lösung φ von (2.5.2) sicherzustellen, schätzen wir die Stärke der Singularität der Kerne ab. Wie man sofort sieht, gilt:

$$\begin{aligned}
 K_x(s(t), t, s(\tau), \tau) &= \frac{-s(t) + s(\tau)}{4\pi^{1/2} (t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(s(t)-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right\} \Rightarrow \\
 |K_x(s(t), t, s(\tau), \tau)| &\leq \frac{\|\dot{s}\|_{\mathbb{T}}}{\pi^{1/2} (t-\tau)^{1/2}} \leq \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{1/2}} ,
 \end{aligned}$$

$K_X(-s(t), t, s(\tau), \tau)$ ist sogar stetig bezüglich τ . Es folgt:

$$|N_X(s(t), t, s(\tau), \tau)| \leq \text{const.} \cdot (t-\tau)^{-1/2}.$$

G ist einfach abzuschätzen:

$$|G(s(t), t, s(\tau), \tau)| \leq \text{const.} \cdot (t-\tau)^{-1/2}.$$

Insgesamt gilt also:

$$|N_X(s(t), t, s(\tau), \tau) - \dot{s}(\tau)G(s(t), t, s(\tau), \tau)| \leq \text{const.} \cdot (t-\tau)^{1/2}.$$

h und $\dot{s}$ sind stetig. $\ddot{s}$ ist wegen der zusätzlichen Kompatibilitätsvoraussetzung nach Lemma (2.2.1) ebenfalls stetig in $[0, T]$. Damit ist die rechte Seite von (2.5.2) eine stetige Funktion und (2.5.2) entspricht der Operatorgleichung

$$(2.5.3) \quad (I + K)\varphi = q, \quad q \in C[0, T].$$

Standardsätze aus der Theorie der linearen Integralgleichungen (z.B. Tricomi [21, S. 38]) liefern die Existenz einer eindeutig bestimmten, stetigen Lösung $\varphi \in C[0, T]$ von (2.5.2).

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \bar{z}(x, t) := & - \int_0^t N(x, t, 0, \tau) h(\tau) d\tau + \int_0^t N(x, t, s(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t G_X(x, t, s(\tau), \tau) \dot{s}(\tau) \delta s(\tau) d\tau + \int_0^t N(x, t, s(\tau), \tau) \dot{s}^2(\tau) \delta s(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüft, ist $\bar{z}$ eine Lösung des Randwertproblems (2.3.20) und stimmt daher mit z überein (MP). Außerdem ist $z_X(s(\cdot), \cdot) = \bar{z}_X(s(\cdot), \cdot) = \varphi \in C[0, T]$ und damit $\delta \dot{s} = -\dot{s}^2 \delta s - z_X(s(\cdot), \cdot)$ stetig. Das war die Behauptung b) des Satzes (2.5.1).

**

Ist für ein $\epsilon > 0$ $h|_{[0,\epsilon]} \equiv 0$, so ist aufgrund der Eindeutigkeit $\delta s|_{[0,\epsilon]} \equiv 0$. Da für beliebiges $t > 0$ die Lösung u des FRWPs (2.1.1-5) auf dem Rand s differenziert werden darf, ist die Kompatibilitätsbedingung (2.2.3) für die neue Anfangsfunktion $\tilde{f}(x) = u(x, \epsilon)$ im Punkt $(s(\epsilon), \epsilon)$ trivialerweise erfüllt und wir erhalten als

(2.5.4) Korollar:

Sind die Kompatibilitätsbedingungen (2.2.3) nicht erfüllt, jedoch $h|_{[0,\epsilon]} \equiv 0$, $\epsilon > 0$, so ist $\delta s \in C^1[0, T]$ und genügt dem Anfangswertproblem (2.3.21). **

Nachdem Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Systems (2.3.6,7) bzw. (2.4.2,3) sichergestellt sind, sind wir in der Lage, den zugehörigen linearen Lösungsoperator zu definieren:

$$(2.5.5) \quad S'_g : B \rightarrow B, \quad h \mapsto \delta s.$$

Wir wählen bereits jetzt die Bezeichnung S'_g , ohne die Eigenschaften einer F-Ableitung nachgewiesen zu haben. Es dürften jedoch keine Verwechslungen zu befürchten sein.

2.6 F-Differenzierbarkeit des Lösungsoperators S

Um die F-Differenzierbarkeit von S in einem Punkt $g \in A$ zu zeigen, haben wir für den oben definierten Operator S'_g die Beziehung (2.3.4) und seine Stetigkeit nachzuweisen. Da sich die Antitonie von S auf S'_g überträgt, können wir sogar die Operatornorm $\|S'_g\|_T$ angeben, wie der anschließende Satz zeigt.

(2.6.1) Satz: (Antitonie und Stetigkeit von S'_g)

Sei $g \in A$. Dann ist der Operator S'_g antiton, d.h. für alle $h \in B$ besteht die Implikation:

$$(2.6.2) \quad h \leq 0 \implies \delta s = S'_g h \geq 0.$$

Für $\bar{t} := \min\{T, \sup\{t \mid h|_{[0,t]} \equiv 0\}\}$ und alle $h \leq 0$ hat δs sogar die Eigenschaft:

$$(2.6.3) \quad \delta s|_{[0,\bar{t}]} \equiv 0, \quad \bar{t} \wedge t \leq T \quad \delta s(t) > 0.$$

Der lineare Operator S'_g ist außerdem stetig und genügt der Abschätzung:

$$(2.6.4) \quad \|S'_g h\|_T \leq \|S'_g\|_T \|h\|_T = \|S'_g(h \equiv 1)\|_T \|h\|_T \leq T \|h\|_T.$$

Beweis:

(2.6.3) ist offenbar hinreichend für (2.6.2). Es genügt also, (2.6.3) zu zeigen.

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz (2.5.1) folgt $\delta s|_{[0,\bar{t}]} \equiv 0$. Sei nun $\bar{t} < T$ (sonst sind wir fertig).

Annahme: y besitzt ein nichtpositives Minimum für $t > \bar{t}$.

Für $t > \bar{t}$ gilt: $y(0,t) = - \int_0^t h(\tau) d\tau = - \int_{\bar{t}}^t h(\tau) d\tau > 0$.

Das Minimum kann also nur in einem Punkt $(s(t_0), t_0)$, $t_0 > \bar{t}$, angenommen werden (strenges Maximumprinzip, Friedman [36, S. 34]), d.h. $y(s(t_0), t_0) \leq 0$. Da s in t_0 differenzierbar ist, erfüllt $\Omega(s)$ in $(s(t_0), t_0)$ die "innere Kugelbedingung" (siehe Definition in [36, S. 48]) und wir dürfen die parabolische Version des Hopfschen Lemmas (Theorem 14, S. 49 in [36]) anwenden, woraus folgt:

$$0 > y_x(s(t_0), t_0) = -\dot{s}(t_0) y(s(t_0), t_0) \geq 0, \text{ Widerspruch!}$$

Also ist für alle $t > \bar{t}$ $\delta s(t) = y(s(\bar{t}), t) > 0$.

Wir haben noch die Stetigkeit von S'_g , also (2.6.4) zu zeigen. Dazu spalten wir h in $h = h_+ - h_-$, h_+ , $h_- \geq 0$, auf. Dann folgt:

$$\|S'_g h\|_T = \|S'_g(h_+ - h_-)\|_T = \|S'_g h_+ - S'_g h_-\|_T \leq \max(\|S'_g h_+\|_T, \|S'_g h_-\|_T).$$

$$\begin{aligned} \text{Daher sei o.E. } h \leq 0. & \Rightarrow \delta s \geq 0 \Rightarrow \int \delta s \geq 0 \Rightarrow (\text{MP}) \ z \geq 0 \\ \Rightarrow \delta s(t) &= - \int_0^t h(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} z(x,t) dx \leq - \int_0^t h(\tau) d\tau \leq T \|h\|_T \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|S'_g h\|_T = \|\delta s\|_T \leq T \|h\|_T.$$

Schließlich impliziert die Antitonie von S'_g :

$$\|S'_g\|_T = \sup_{\|h\|=1} \|S'_g h\|_T \leq \|S'_g(h \equiv 1)\|_T \leq \|S'_g\|_T,$$

womit die Ungleichungskette (2.6.4) bewiesen ist.

**

Nach der Stetigkeit zeigen wir die "Frechet-Eigenschaft" (2.3.4) im Hauptsatz dieses Kapitels:

(2.6.5) Satz: (Differenzierbarkeit des Lösungsoperators S)

Der Lösungsoperator $S: A \rightarrow B$, $g \mapsto s$, des FRWPs (2.1.1-5) ist in jedem Punkt $g \in A$ F-differenzierbar und die F-Ableitung im Punkt $g \in A$ ist der lineare Operator S'_g . Es gilt für alle $g \in A$:

$$(2.6.6) \quad \forall_{H>0} \quad \bigwedge_{\substack{h \in B, \|h\|_T \leq H \\ g+h \in A}} \|S(g+h) - S(g) - S'_g h\|_T = O(\|h\|_T^2).$$

Beweis:

Nachdem in den Sätzen (2.5.1) und (2.6.1) die Wohldefiniertheit und die Stetigkeit von S'_g gezeigt wurde, bleibt noch (2.6.6) nachzuweisen. Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von Satz (2.3.5). Wie dort nehmen wir wieder der Einfachheit halber an, daß h einerlei Vorzeichen hat, z.B. $h \leq 0$. Wir wenden auf die Lösung (u,s) des FRWPs (2.1.1-5) die zu (2.4.4) analoge Transformation an:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) - \frac{x}{t} \tilde{u}(0,t) \quad ; \quad s(t) = \tilde{s}(t) - \frac{t}{t} \tilde{s}(0) = \tilde{s}(t).$$

Dann genügt U den folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} U_{\tau}(x,t) &= - \int_0^x u_{\tau\xi}(\xi,\tau) d\xi - g(t) = -u_{x\tau}(x,t) + u_{x\tau}(0,t) - g(t) = \\ &= -u_{x\tau}(x,t) = U_{x\tau}(x,t) . \end{aligned}$$

$$U(x,0) = - \int_0^x u(\xi,0) d\xi = - \int_0^x f(\xi) d\xi .$$

$$U(0,t) = - \int_0^t g(\tau) d\tau .$$

Aus der Integralgleichung (2.1.7) ergibt sich:

$$(2.6.8) \quad U(s(t),t) = - \int_0^{s(t)} u(\xi,t) d\xi - \int_0^t g(\tau) d\tau = s(t) \cdot b - \int_0^b f(\xi) d\xi .$$

$$U_x(s(t),t) = -u(s(t),t) = 0 .$$

Sei y die Lösung des Randwertproblems (2.4.2) und $\bar{U}$ die durch (2.6.7) transformierte Funktion von $\bar{u}$. Wir betrachten in $\Omega(s)$ die Funktion $v := \bar{U} - U - y$. v genügt in $\Omega(s)$ dem folgenden System:

$$(2.6.9) \quad \begin{aligned} Lv &= 0 \quad \text{in } \Omega(s) , \quad v(x,0) = 0 , \quad v(0,t) = 0 , \\ v(s(t),t) &= (\bar{U} - U - y)(s(t),t) . \end{aligned}$$

Wir berechnen durch Taylorentwicklung um $\bar{s}(t)$ die Funktionen $v(s(t),t)$ und $v_x(s(t),t)$:

$$\begin{aligned} \bar{U}(s(t),t) &= \bar{U}(\bar{s}(t),t) + \Delta s(t) \bar{U}_x(\bar{s}(t),t) + \frac{1}{2} (\Delta s(t))^2 \bar{U}_{xx}(\zeta_1(t),t) \\ &= \bar{s}(t) - b - \int_0^b f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} (\Delta s(t))^2 \bar{u}_x(\zeta_1(t),t) . \end{aligned}$$

$$y(s(t),t) = - \int_0^{s(t)} z(\xi,t) d\xi - \int_0^t h(\tau) d\tau = \delta s(t) .$$

Es folgt:

$$(2.6.10) \quad v(s(t), t) = \bar{s}(t) - s(t) - \delta s(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\Delta s(t))^2 \bar{u}_x(\zeta_1(t), t) =: ds(t) - \frac{1}{2}(\Delta s(t))^2 \bar{u}_x(\zeta_1(t), t) .$$

Dabei wurde $ds := \bar{s} - s - \delta s$ gesetzt.

$$(2.6.11) \quad -v_x(s(t), t) = (-\bar{u}_x + u_x + y_x)(s(t), t) = (\bar{u} - z)(s(t), t) =$$

$$= \bar{u}(\bar{s}(t), t) - \Delta s(t) \bar{u}_x(\bar{s}(t), t) + \frac{1}{2}(\Delta s(t))^2 \bar{u}_{xx}(\zeta_2(t), t) - (\dot{s} \delta s)(t) =$$

$$= \dot{\bar{s}}(t) \Delta s(t) - \dot{s}(t) \delta s(t) + \frac{1}{2}(\Delta s(t))^2 \bar{u}_{xx}(\zeta_2(t), t) =$$

$$= \dot{s}(t) [\Delta s - \delta s](t) + [\dot{\bar{s}} - \dot{s}](t) \Delta s(t) + \frac{1}{2}(\Delta s(t))^2 \bar{u}_{xx}(\zeta_2(t), t) =$$

$$= \dot{s}(t) ds(t) + \Delta \dot{s}(t) \Delta s(t) + \frac{1}{2}(\Delta s(t))^2 \bar{u}_{xx}(\zeta_2(t), t) .$$

Seien nun

$$A_1(t) := \frac{1}{2}(\Delta s(t))^2 \bar{u}_x(\zeta_1(t), t) , \quad A_2(t) := \Delta \dot{s}(t) \Delta s(t) ,$$

$$A_3(t) := \frac{1}{2}(\Delta s(t))^2 \bar{u}_{xx}(\zeta_2(t), t) .$$

Für $\|h\|_T \leq H$ bleiben nach (2.1.11) $|\bar{u}_x(\zeta_1(t), t)|$ und nach (2.2.2) $|\bar{u}_{xx}(\zeta_2(t), t)|$ gleichmäßig (bezüglich t und h) beschränkt, sodaß wir die A_i mit den Lemmata (2.1.12) und (2.2.14) abschätzen können:

$$\|A_1\|_T \leq C_1 \|\Delta s\|_T^2 \leq C_2 \|h\|_T^2 .$$

$$(2.6.12) \quad \|A_2\|_T \leq \|\Delta s\|_T \|\Delta \dot{s}\|_T \leq C_3 \|h\|_T .$$

$$\|A_3\|_T \leq C_4 \|\Delta s\|_T^2 \leq C_5 \|h\|_T^2 .$$

Wir kombinieren die Gleichungen (2.6.10) und (2.6.11) so, daß der ds -Term herausfällt und erhalten mit $A := -\dot{s}A_1 - A_2 - A_3$ das folgende Randwertproblem für v mit gemischten Randbedingungen:

$$(2.6.13) \quad \begin{aligned} Lv &= 0 \quad \text{in } \Omega(s), \quad v(x,0) = 0, \quad v(0,t) = 0, \\ \dot{s}(t)v(s(t),t) + v_x(s(t),t) &= A(t), \end{aligned}$$

wobei für A wegen (2.6.12) gilt:

$$(2.6.14) \quad \|h\|_T^{\wedge} \leq H \quad \|A\|_T \leq \|\dot{s}\|_T \|A_1\|_{T^+} \|A_2\|_{T^+} \|A_3\|_T \leq C_6 \|h\|_T^2.$$

Um für die Differenz $ds = \Delta s - \delta s$ die gewünschte Beziehung (2.6.6) zu erhalten, genügt es wegen (2.6.10) und (2.6.12), die Funktion $m := v(s(\cdot), \cdot)$ abzuschätzen. Dazu leiten wir eine Integralgleichung für m her und wenden das Gronwall-Lemma (2.1.22) an.

Da $v_x(s(\cdot), \cdot)$ stetig ist (siehe (2.6.11)), können wir v über die Gleichung (2.1.19) darstellen:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_0^t G(x,t,s(\tau),\tau) [\dot{s}(\tau)v(s(\tau),\tau) + v_x(s(\tau),\tau)] d\tau + \\ &\quad + \int_0^t N_x(x,t,s(\tau),\tau) v(s(\tau),\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t h(x,t,s(\tau),\tau) A(\tau) d\tau + \int_0^t N_x(x,t,s(\tau),\tau) v(s(\tau),\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Bilden wir den Grenzwert $x \rightarrow s(t)$ und beachten wieder die Sprungrelation (2.1.17), so ergibt sich folgende Integralgleichung für m :

$$m(t) = 2 \int_0^t G(s(t),t,s(\tau),\tau) A(\tau) d\tau + 2 \int_0^t N_x(s(t),t,s(\tau),\tau) m(\tau) d\tau.$$

Mit den bereits verwendeten Abschätzungen

$$|G(s(t), t, s(\tau), \tau)| \leq \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{1/2}}, \quad |N_x(s(t), t, s(\tau), \tau)| \leq \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{1/2}}$$

erhalten wir

$$|m(t)| \leq C_7 t^{1/2} \|A\|_T + C_8 \int_0^t \frac{|m(\tau)|}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau$$

und mit Hilfe des Gronwall-Lemmas (2.1.22)

$$|m(t)| \leq C_7 t^{1/2} \|A\|_T + \exp\{2C_8 t^{1/2}\} C_7 t \|A\|_T \leq C_9 t^{1/2} \|A\|_T.$$

Benutzen wir jetzt Gleichung (2.6.10), so erhalten wir mit (2.6.12) und (2.6.14) endgültig:

$$\begin{aligned} \|S(g+h) - S(g) - S'_g h\|_T &= \|ds\|_T = \|m - A_1\|_T \leq \\ &\leq \|m\|_T + \|A_1\|_T \leq C_{10} \|A\|_T + \|A_1\|_T \leq C_{11} \|h\|_T^2. \end{aligned}$$

Das war die Behauptung des Satzes.

..

Zum Beweis dieses Satzes bemerken wir noch, daß sich die letzte Ungleichung einfacher aus dem Maximumprinzip herleiten läßt, falls sichergestellt werden kann, daß $\dot{s}(t) \geq \gamma > 0$ ist. Dies ist jedoch nur unter zusätzlichen Voraussetzungen an f möglich, sodaß wir den Umweg über die Integralgleichung für m wählen.

Der entscheidende Unterschied zum Beweis von Satz (2.3.5) liegt darin, daß es uns gelang, durch die Transformation (2.6.7) und die Gleichungen (2.6.10,11) das System (v, ds) zu entkoppeln.

2.7 Lipschitz-Stetigkeit der F-Ableitung

In Kapitel 4 werden wir zum Beweis der quadratischen Konvergenz eines Newton-ähnlichen Approximationsverfahrens nicht nur die F-Differenzierbarkeit des Lösungsoperators in einem Punkt $g \in A$, sondern zusätzlich die Lipschitz-Stetigkeit der F-Ableitung $S': g \mapsto S'_g$ benötigen. Dies ist der Inhalt des nächsten Satzes:

(2.7.1) Satz: (Lipschitz-Stetigkeit der F-Ableitung)

Die F-Ableitung $S': g \mapsto S'_g$ ist in jedem Punkt $g \in A$ Lipschitz-stetig, d.h. zu jedem $g \in A$ gibt es Konstanten $C, D > 0$, sodaß

$$(2.7.2) \quad \bigwedge_{\substack{\Delta g \in B \\ \|\Delta g\|_T \leq D}} \bigwedge_{h \in B} \|(S'_{g+\Delta g} - S'_g)h\|_T \leq C \|\Delta g\|_T \|h\|_T.$$

Beweis:

Wir leiten zunächst eine geeignete Integralgleichung für δs her und schätzen dann die Differenz zweier Lösungen in Abhängigkeit von der Störung der auftretenden Kerne (verursacht durch Δg) ab.

Wir benutzen die Darstellung von δs über das Randwertproblem (2.4.2). Die Funktion $y_x(s(\cdot), \cdot) = -\delta s$ ist stetig in $[0, T]$ und damit die Formel (2.1.19) anwendbar. Mit der Abkürzung $H(t) := \int_0^t h(\tau) d\tau$ erhalten wir nach Einsetzen der Randbedingungen die Gleichung

$$y(x, t) = \int_0^t N_x(x, t, 0, \tau) H(\tau) d\tau + \int_0^t N_x(x, t, s(\tau), \tau) y(s(\tau), \tau) d\tau.$$

Bilden wir den Grenzwert $x \rightarrow s(t)$, beachten (2.1.17) im zweiten Integral und setzen $\delta s = y(s(\cdot), \cdot)$ ein, so ergibt sich folgende Integralgleichung für δs :

$$\begin{aligned}
 (2.7.3) \quad \delta s(t) &= 2 \int_0^t N_x(s(\tau), t, s(\tau), \tau) \delta s(\tau) d\tau = \\
 &= 2 \int_0^t N_x(s(\tau), t, 0, \tau) H(\tau) d\tau .
 \end{aligned}$$

(Gleichung (2.7.3) könnte zu einem direkten Beweis für den Existenz- und Eindeutigkeitssatz (2.5.1) herangezogen werden, allerdings bereitet dann der Nachweis der Differenzierbarkeit von δs erhebliche Schwierigkeiten!)

Sei nun $h \in B$ fest vorgegeben und $\bar{g} := g + \Delta g \in A$, $s := S(g)$, $\bar{s} := S(\bar{g})$, $\delta s := S'_g h$, $\delta \bar{s} := S'_{\bar{g} + \Delta g} h$ und $\varphi := \delta \bar{s} - \delta s$. Dann genügt φ der folgenden Integralgleichung:

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \delta \bar{s}(t) - \delta s(t) = \\
 &= 2 \int_0^t [N_x(\bar{s}(\tau), t, \bar{s}(\tau), \tau) \delta \bar{s}(\tau) - N_x(s(\tau), t, s(\tau), \tau) \delta s(\tau)] d\tau + \\
 &+ 2 \int_0^t H(\tau) [N_x(\bar{s}(\tau), t, 0, \tau) - N_x(s(\tau), t, 0, \tau)] d\tau = \\
 &= 2 \int_0^t N_x(s(\tau), t, s(\tau), \tau) [\delta \bar{s}(\tau) - \delta s(\tau)] d\tau + \\
 &+ 2 \int_0^t [N_x(\bar{s}(\tau), t, \bar{s}(\tau), \tau) - N_x(s(\tau), t, s(\tau), \tau)] \delta \bar{s}(\tau) d\tau + \\
 &+ 2 \int_0^t H(\tau) [N_x(\bar{s}(\tau), t, 0, \tau) - N_x(s(\tau), t, 0, \tau)] d\tau .
 \end{aligned}$$

Umstellen liefert:

$$\begin{aligned}
 (2.7.4) \quad \varphi(t) &= \int_0^t N_x(s(\tau), t, s(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = \\
 &= 2 \int_0^t [N_x(\bar{s}(\tau), t, \bar{s}(\tau), \tau) - N_x(s(\tau), t, s(\tau), \tau)] \delta \bar{s}(\tau) d\tau +
 \end{aligned}$$

$$+ 2 \int_0^t H(\tau) [N_x(\bar{s}(t), t, 0, \tau) - N_x(s(t), t, 0, \tau)] d\tau =: (V_1 + V_2)(t).$$

Der Kern von V_1 entspricht dem Kern von V_3 in Gleichung (2.2.17). Wir können daher die Abschätzung (2.2.20) übernehmen und erhalten mit Lemma (2.2.14) und der Beschränktheit von S'_g :

$$\begin{aligned} (2.7.5) \quad |V_1(t)| &\leq A_1 t^{1/2} \|\dot{\bar{s}} - \dot{s}\|_T \|\delta \bar{s}\|_T \leq \\ &\leq A_2 t^{1/2} \|\Delta g\|_T \|\delta \bar{s}\|_T \leq A_2 t^{1/2} \|\Delta g\|_T \|h\|_T. \end{aligned}$$

Der Ausdruck V_2 entspricht dem Term V_4 in (2.2.17). Die zugehörige Abschätzung (2.2.18) liefert:

$$(2.7.6) \quad |V_2(t)| \leq A_3 t \|h\|_T \|\bar{s} - s\|_T \leq A_4 t \|h\|_T \|\Delta g\|_T.$$

Wir fassen (2.7.5) und (2.7.6) zusammen,

$$|V_1(t)| + |V_2(t)| \leq A_5 t^{1/2} \|h\|_T \|\Delta g\|_T,$$

und erhalten mit (2.7.4):

$$(2.7.7) \quad |\varphi(t)| \leq A_6 t^{1/2} \|h\|_T \|\Delta g\|_T + A_6 \int_0^t \frac{|\varphi(\tau)| d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}.$$

Das Gronwall-Lemma (2.1.22) liefert endgültig:

$$(2.7.8) \quad |\varphi(t)| \leq A_7 t^{1/2} \|\Delta g\|_T \|h\|_T.$$

Das war die Behauptung des Satzes.

**

Mit dem Beweis von Satz (2.7.1) wurde der letzte Schritt zum Nachweis der stetigen F-Differenzierbarkeit des Lösungsoperators S vollzogen.

In den folgenden drei Abschnitten dieses Kapitels sollen Ergänzungen und Erweiterungen auf allgemeinere FRWPe behandelt werden. Da diese weitergehenden Ergebnisse in den Kapiteln 3 und 4 nicht verwendet werden, ist die Kenntnis dieser drei Abschnitte zum Verständnis des approximationstheoretischen Teils (Kapitel 3) nicht erforderlich.

Allerdings wurden in die Computerprogramme zur numerischen Behandlung des inversen Stefan-Problems diese Verallgemeinerungen zum Teil übernommen, sodaß zu deren Verständnis auf die folgenden Ergebnisse nicht verzichtet werden kann.

Wir befassen uns zunächst mit der Ersetzung der Neumann-Randbedingung auf der t -Achse durch die Dirichlet-Randbedingung $u(0,t) = g(t)$.

2.8 Dirichlet-Randbedingung auf der t -Achse

Ersetzt man die Randbedingung (2.1.3) $u_x(0,t) = g(t)$ durch die Dirichlet-Randbedingung

$$(2.8.1) \quad u(0,t) = g(t), \quad 0 < t \leq T, \quad g \geq 0,$$

so gelten die Existenz-, Eindeutigkeits-, Differenzierbarkeits- und Monotonieaussagen aus Abschnitt 1 für die Lösung (u,s) analog (siehe z.B. Cannon, Hill [14]). An die Stelle der Integralgleichung (2.1.7) für s tritt die Gleichung

$$(2.8.2) \quad s^2(t) = b^2 + 2 \int_0^t g(\tau) d\tau - 2 \int_0^{s(t)} x u(x,t) dx + 2 \int_0^b x f(x) dx,$$

die man durch Integration der Identität $vLu - uL^*v = 0$, ($v \equiv x$), über $\Omega(s)$ erhält. Da die Schranke $A(t)$ in (2.1.11)

für Dirichlet-Daten von $\bar{g}$ abhängt, muß der Banachraum B durch $C^1[0,T]$ mit der entsprechenden Norm ersetzt werden. Wir wollen darauf nicht weiter eingehen.

Die in den Abschnitten 2 - 7 benutzten Beweisideen lassen sich nur zum Teil übertragen, insbesondere scheint der Entkopplungstrick (2.4.2) nicht ohne weiteres durchführbar zu sein. Wir geben an dieser Stelle nur die zu (2.3.6,7) und (2.3.20,21) analogen Formeln an.

Sei $B_1 := C^1[0,T]$, $A_1 := \{g \in B_1 \mid g \geq 0\}$ und $S: A_1 \rightarrow B_1$, $g \rightarrow s$ der Lösungsoperator. Falls S in $g \in A_1$ F-differenzierbar ist, so genügt die Funktion $\delta s = S'_g h$, $h \in B_1$, dem System:

$$(2.8.3) \quad \delta s(t) = \frac{1}{s(t)} \left[\int_0^t h(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} xz(x,t) dx \right],$$

$$(2.8.4) \quad \left. \begin{aligned} Lz(x,t) &= 0, & (x,t) &\in \Omega(s), \\ z(x,0) &= 0, & 0 \leq x \leq b, \\ z(0,t) &= h(t), \\ z(s(t),t) &= s(t)\delta s(t), \end{aligned} \right\} \quad 0 < t \leq T.$$

Ist $z_x(s(\cdot), \cdot)$ in $[0,T]$ stetig, so ist $\delta s \in C^1[0,T]$ und genügt dem gewöhnlichen Anfangswertproblem:

$$(2.8.5) \quad \delta \dot{s}(t) = -\dot{s}^2(t)\delta s(t) - z_x(s(t),t), \quad \delta s(0) = 0.$$

Verwendet man zur numerischen Berechnung der Ableitung $\delta s = S'_g h$ nicht das System (2.8.3,4), sondern das System (2.8.4,5), so braucht beim Übergang von Neumann- zu Dirichlet-Daten nur die Randbedingung $z(0,t) = h(t)$ ausgetauscht zu werden, alle übrigen Gleichungen bleiben erhalten.

2.9 Verallgemeinerungen

Wir kehren wieder zu Neumann-Randbedingungen auf der t -Achse zurück und betrachten das allgemeinere FRWP, wie es z.B. von Sherman [68] behandelt wurde.

$$(2.9.1) \quad Lu(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega(s),$$

$$(2.9.2) \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq b = s(0) > 0,$$

$$(2.9.3) \quad u_x(0,t) = g(t),$$

$$(2.9.4) \quad u(s(t),t) = 0, \quad \left. \vphantom{\int} \right\} 0 < t \leq T.$$

$$(2.9.5) \quad \alpha u_x(s(t),t) = -\dot{s}(t) + q(t), \quad \alpha > 0$$

Dabei seien F und q in $\bar{\Omega}(s)$ bzw. in $[0,T]$ stetig und mögen den Vorzeichenbedingungen

$$(2.9.6) \quad \bigwedge_{(x,t) \in \Omega(s)} F(x,t) \leq 0, \quad \bigwedge_{t \in [0,T]} q(t) \geq 0,$$

genügen. Voraussetzung (2.9.6) garantiert die Monotonie des freien Randes und ließe sich abschwächen. Da wir in diesem Abschnitt jedoch nur an den Formeln interessiert sind, legen wir keinen Wert auf größtmögliche Allgemeinheit.

Wir leiten zuerst die Integralgleichung für s her:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} F(x,\tau) dx d\tau &= \int_0^t \int_0^{s(\tau)} [u_{xx} - u_t](x,\tau) dx d\tau = \int_0^t [u_x(s(\tau),\tau) - \\ &- u_x(0,\tau)] d\tau = \int_0^t \left[\frac{d}{d\tau} \int_0^{s(\tau)} u(x,\tau) dx - \dot{s}(\tau) u(s(\tau),\tau) \right] d\tau = \\ &= -\frac{1}{\alpha} (s(t) - b) + \frac{1}{\alpha} \int_0^t q(\tau) d\tau - \int_0^t g(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} u(x,t) dx + \int_0^b f(x) dx. \end{aligned}$$

$$(2.9.7) \quad s(t) = b + \int_0^t [q(\tau) - \alpha g(\tau)] d\tau - \alpha \int_0^{s(t)} u(x,t) dx +$$

$$\tau = \alpha \int_0^b f(x) dx = \alpha \int_0^t \int_0^s F(x, \tau) dx d\tau .$$

Mit der gleichen Technik wie im Beweis von Satz (2.3.5) erhält man die Formeln für δs und z :

$$(2.9.8) \quad \delta s(t) = -\alpha \left[\int_0^t h(\tau) d\tau + \int_0^s z(x, t) dx + \int_0^t \delta s(\tau) F(s(\tau), \tau) d\tau \right]$$

$$Lz(x, t) = 0 , \quad (x, t) \in \Omega(s) ,$$

$$(2.9.9) \quad z(x, 0) = 0 , \quad z_x(0, t) = h(t) ,$$

$$z(s(t), t) = \frac{1}{\alpha} \delta s(t) (\dot{s}(t) - q(t)) .$$

$$(2.9.10) \quad \delta \dot{s}(t) = -[\dot{s}(t)(\dot{s}(t) - q(t)) + \alpha F(s(t), t)] \delta s(t) - \\ - \alpha z_x(s(t), t) , \quad \delta s(0) = 0 .$$

Wir zeigen nur an einem Beispiel, wie sich diese verallgemeinerten Formeln ableiten lassen. Dazu verwenden wir die Bezeichnungen von Satz (2.3.5) und subtrahieren die für $\bar{s}$ und s gültigen Gleichungen (2.9.7) :

$$\bar{s}(t) - s(t) = -\alpha \left[\int_0^t h(\tau) d\tau + \int_0^s [\bar{u} - u](x, t) dx + \int_0^{\bar{s}(t)} \bar{u}(x, \tau) dx + \right. \\ \left. + \int_0^t \int_{s(\tau)}^{\bar{s}(\tau)} F(x, \tau) dx d\tau \right] .$$

Wir behandeln den letzten Term weiter, die übrigen lassen sich wie in (2.3.9, ff) umformen:

$$\int_0^t \int_{s(\tau)}^{\bar{s}(\tau)} F(x, t) dx d\tau = \int_0^t \int_{s(\tau)}^{\bar{s}(\tau)} F(s(\tau), \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_{s(\tau)}^{\bar{s}(\tau)} [F(x, \tau) -$$

$$- F(s(\tau), \tau)] dx d\tau =: \int_0^{\tau} F(s(\tau), \tau) \Delta s(\tau) d\tau + A(t) .$$

$A(t)$ schätzen wir mit dem Stetigkeitsmodul $\omega(F; \delta)$ ab:

$$\begin{aligned} |A(t)| &\leq t |\Delta s(t)| \omega(F; \Delta s(t)) \leq T \|\Delta s\|_T \omega(F; \|\Delta s\|_T) \leq \\ &\leq C_1 \|h\|_T \omega(F; C_2 \|h\|_T) . \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von F gilt deshalb: $\|A\|_T = o(\|h\|_T)$. Mit der analogen Herleitung der übrigen Formeln (2.9.9, 10) ist die F -Differenzierbarkeit selbstverständlich noch nicht bewiesen. Dazu müßten die gleichen Überlegungen wie in den Abschnitten 2-7 angestellt werden. Allerdings wären die dort verwendeten Methoden an einigen Stellen (z.B. Satz (2.4.1)) wesentlich zu modifizieren, da sich die Kopplung zwischen z und δs durch die Inhomogenität F entscheidend verändert (Gleichung (2.9.8)).

Auch die Lipschitz-Stetigkeit von S und die stetige Abhängigkeit von $\dot{s}$ von g müßten erneut bewiesen werden. Wir wollen nicht weiter darauf eingehen und uns dem bisher ausgeklammerten Fall $s(0) = 0$ zuwenden.

2.10 Der Fall $s(0) = 0$

Der Fall $s(0) = 0$ nimmt eine Sonderstellung ein, da für $(x, t) \rightarrow (0, 0)$ die Integrale in den Gleichungen (2.1.19, 20) eine nichtintegrabile Singularität enthalten können. Beim Herangehen an die Beschränktheit von $|u_{xx}|$ in Lemma (2.2.1) wurde z.B. die Voraussetzung $x \geq \frac{b}{2} > 0$ entscheidend ausgenutzt, fast alle Konstanten sind nämlich proportional einer Potenz von b^{-1} und wachsen für $b \rightarrow 0$ über alle Grenzen. Eine gleichmäßige Beschränktheit von $|u_{xx}|$ in ganz $\Omega(s)$ ist ohne zusätzliche Regularitätsbedingungen an g auch gar

nicht zu erwarten. Trotzdem können wir auch in diesem Fall, zunächst lokal, d.h. unter Einschränkungen an die Endzeit T, die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Ableitungssystems beweisen.

Die der Formel (2.1.7) entsprechende Gleichung lautet:

$$(2.10.1) \quad s(t) = - \int_0^t g(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} u(x, t) dx .$$

Die Aussagen über die Existenz, Eindeutigkeit, Monotonie und die stetige Abhängigkeit des Randes s von g können wörtlich aus dem 1. Abschnitt übernommen werden (die f-Terme in den Gleichungen sind einfach zu streichen), die Beweise dazu findet man bei Cannon, Primicerio [17].

(2.10.2) Satz: (Existenz und Eindeutigkeit für das F-System)

Sei $g \in A$ und $s = S(g)$, $s(0) = 0$, die eindeutige Lösung des FRWPs (2.1.1, 3, 4, 5) mit $b = 0$. Dann gibt es ein $T > 0$, sodaß das Ableitungssystem

$$(2.10.3) \quad \delta s(t) = - \int_0^t h(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} z(x, t) dx ,$$

$$(2.10.4) \quad Lz = 0 \text{ in } D, \quad z|_X = 0, \quad z|_Y = \delta s(t) , \quad z(s(\tau), t) = \dot{s}(t) \delta s(t) ,$$

für alle $h \in B$ und alle $t \leq T$ eine eindeutig bestimmte Lösung $(z, \delta s)$ besitzt.

Beweis:

Wir benutzen eine ähnliche Technik wie Evans [33] und Kyner [52]: Wir konstruieren eine kontrahierende Abbildung P auf B. Wegen $s(0) = 0$ und der Stetigkeit von s und $\dot{s}$ existiert ein $T > 0$, sodaß

$$(2.10.5) \quad \|\dot{s}\|_T \|s\|_T \leq R < 1 .$$

Sei h jetzt fest gewählt und P die folgende Abbildung:

$$(2.10.6) \quad P: B \rightarrow B, \quad \varphi \mapsto w \mapsto - \int_0^{\cdot} h(\tau) d\tau - \int_0^{s(\cdot)} w(x, \cdot) dx =: r,$$

wobei w die Lösung des Randwertproblems

$$(2.10.7) \quad Lw=0 \text{ in } \Omega(s), \quad w_x(0,t)=h(t), \quad w(s(t),t)=\dot{s}(t)\varphi(t),$$

ist. Daß P wohldefiniert ist, folgt sofort aus der Existenz und Eindeutigkeit einer stetigen Lösung w des Randwertproblems (2.10.7) für stetiges φ mit $\varphi(0)=0$ (Evans [33]). Das Bild $P\varphi$ ist wieder stetig und es gilt: $P\varphi(0) = 0$. Wir zeigen: P ist eine Kontraktion auf $M:=\{\varphi \in B \mid \varphi(0)=0\}$.

Seien φ und $\bar{\varphi}$ aus M . Dann gilt:

$$(2.10.8) \quad (P\bar{\varphi} - P\varphi)(t) = - \int_0^{s(t)} [w - \bar{w}](x, t) dx =: - \int_0^{s(t)} v(x, t) dx.$$

und v ist die Lösung des Randwertproblems:

$$Lv=0 \text{ in } \Omega(s), \quad v_x(0,t)=0, \quad v(s(t),t)=\dot{s}(t)(\bar{\varphi}(t)-\varphi(t)).$$

v kann wegen des MPs und $v_x(0,t)=0$ sein Betragsmaximum nur auf dem Rand s annehmen, woraus folgt:

$$\|v\|_{\Omega(s)} \leq \|v(s(\cdot), \cdot)\|_T \leq \|\dot{s}\|_T \|\bar{\varphi} - \varphi\|_T.$$

Mit (2.10.8) ergibt sich:

$$\|P\bar{\varphi} - P\varphi\|_T \leq \int_0^1 \int_0^{s(t)} |v(x, t)| dx dt \leq \|\dot{s}\|_T \|\bar{\varphi} - \varphi\|_T,$$

$$\text{und daraus:} \quad \|P\bar{\varphi} - P\varphi\|_T \leq R \|\bar{\varphi} - \varphi\|_T.$$

P ist also eine Kontraktion auf M , was die Existenz eines eindeutigen bestimmten Elements $\delta s \in B$ mit $P\delta s = \delta s$ impliziert. Diese Funktion δs ist gerade die Lösung des Systems (2.10.3,4). Das war die Behauptung.

Wir nutzen nun den Evolutionscharakter des Systems (2.10.3,4) aus und erhalten mit den Ergebnissen aus Abschnitt 5 sogar die globale Existenz und Eindeutigkeit.

(2.10.9) Korollar:

Die Aussage von Satz (2.9.2) gilt ohne Einschränkung an T.

Beweis:

Sei T eine Endzeit, für die (2.10.5) erfüllt ist. Mit der Transformation $\tau := t - T$, $\varepsilon := x$, $\bar{s}(\tau) := s(t)$, $\bar{z}(\xi, \tau) := z(x, t)$, $\delta \bar{s}(\tau) = \delta s(t)$, $\bar{h}(\tau) = h(t)$ besteht das Problem der Fortsetzung der Funktionen z und δs für $t > T$ in der Lösung des Problems:

$$L\bar{E} \bar{z}, \bar{z} = 0, \quad 0 < \tau < \bar{s}(\tau), \quad \tau > 0,$$

(2.10.10)

$$\bar{z}(\xi, 0) = z(\varepsilon, T), \quad \bar{z}_{\xi}(0, \tau) = \bar{h}(\tau), \quad \bar{z}(\bar{s}(\tau), \tau) = \dot{\bar{s}}(\tau) \delta \bar{s}(\tau),$$

$$\bar{z}(\tau) = \bar{z}(\xi, \tau) = - \int_0^{\tau} \bar{z}(\xi, \tau) d\xi = \int_0^{\tau} \bar{z}(\xi, \tau) d\xi.$$

Da $\bar{s}(0) = s(T) > 0$ ist, können wir auf dieses System den Existenz- und Eindeutigkeitssatz (2.5.1) anwenden, denn das System (2.10.10,11) unterscheidet sich nur durch die Inhomogenität der Anfangsfunktion $\bar{z}(\xi, 0)$, was wegen der Glattheit von $z(x, T)$ den Beweis des Satzes nur unwesentlich ändert. **

Nach der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Systems (2.10.3,4) müßten jetzt die verschiedenen Eigenschaften der F-Ableitung nachgewiesen werden. Natürlich folgt aus der gleichen Evolutionsargumentation wie im Korollar die F-Differenzierbarkeit der Operatoren $S_{\varepsilon}: C[\varepsilon, T] \rightarrow C[\varepsilon, T]$, $g|[\varepsilon, T] \rightarrow S|[\varepsilon, T]$ ($u_x(0, t)$ in $[0, \varepsilon]$ fest vorgegeben) für alle $\varepsilon > 0$. Ob auch der uneingeschränkte Operator S differenzierbar ist, läßt sich damit jedoch nicht beantworten, sodaß wir diese Frage offen lassen müssen.

III. Approximation

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Approximation stetiger Funktionen durch freie Ränder, wir behandeln folgendes Problem:

Suche ein $g^* \in V$ mit $\|\tilde{s} - S(g^*)\| = \inf\{\|\tilde{s} - S(g)\| \mid g \in V\}$.

V ist dabei eine geeignete Teilmenge des $C[0,T]$, und $\|\cdot\|$ entweder die L_2 - oder die L_∞ -Norm auf $[0,T]$. Obiges nichtlineare Approximationsproblem stellt eine Verallgemeinerung des inversen Stefanproblems (ISP) dar, denn die optimale Kontrolle g^* der besten Approximation $s^* = S(g^*)$ löst das ISP, falls $\tilde{s} = s^*$ erreicht werden kann, d.h., falls $\tilde{s}$ im Bild $S(V)$ liegt.

Die Umformulierung des ISPs in ein nichtlineares Approximationsproblem ist aus verschiedenen Gründen vorteilhaft. Zunächst braucht man sich bei der Vorgabe von $\tilde{s}$ nicht auf die Menge $S(A)$ der möglichen Ränder zu beschränken, für $\tilde{s}$ kommt z.B. durchaus ein Polygonzug in Frage, und zweitens lassen sich, mindestens bei der konstruktiven Berechnung der besten Approximation (Kapitel 4), zusätzliche Kontrollrestriktionen berücksichtigen, die durch den physikalischen Hintergrund nahegelegt werden.

Das ISP als L_1 -Approximationsproblem wurde bereits von Saguez [64,65] behandelt. Allerdings sind die dort angegebenen Beweise zum Teil nicht nachvollziehbar. Da die von Saguez vorgeschlagene Methode (Gradientenverfahren) auch für uns in Frage kommt, und Kapitel 1 einen sehr einfachen Zugang zum L_2 -Approximationsproblem gestattet, sollen im 1. Abschnitt die wesentlichen Tatsachen kurz dargestellt werden.

Unser Hauptinteresse gilt aber dem komplizierteren Tschebyscheff-Approximationsproblem, auf das wir in allen Einzelheiten eingehen wollen. Am Anfang, im 2. Abschnitt, steht dabei

die Frage nach der Existenz einer besten Approximation, die wir für den Fall eines endlichdimensionalen Kegels V beantworten können. In den folgenden Abschnitten ist es unser Ziel, die beste Approximation s^* zu charakterisieren, wobei die Begriffe "lokale" und "globale Haarsche Bedingung" eine zentrale Rolle spielen.

Ihr Nachweis, das grundlegende Ergebnis dieses Kapitels, gelingt über eine genaue Untersuchung der Nullstellengebilde der Differenz zweier Lösungen u und $\bar{u}$ des FRWPs (2.1.1-5), bzw. der Lösung z des Systems (2.3.20,21) in Abschnitt 4. Die Alternanteneigenschaft der besten Approximation, die starke Eindeutigkeit und der Fehlereinschließungssatz (Abschnitte 5-7) sind dann wichtige Konsequenzen aus diesem Ergebnis.

3.1 L_2 -Approximation

Wir formulieren zunächst die Approximationsaufgabe. Sei $A := \{g \in C[0, T] \mid g \leq 0\}$, $\tilde{s} \in C[0, T]$, $\tilde{s}(0) = b$, der zu approximierende Rand und $\Delta s := S(g) - \tilde{s}$ die Fehlerfunktion. Mit dem L_2 -Funktional

$$(3.1.1) \quad I(g) := \frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{s} - S(g)]^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \Delta s^2(t) dt = \frac{1}{2} \|\Delta s\|_2^2,$$

lautet unser Problem:

$$(3.1.2) \quad \text{Suche ein } g^* \in A \text{ mit } I(g^*) = \inf\{I(g) \mid g \in A\}!$$

Wir diskutieren die Eigenschaften des Funktionals I .

(3.1.3) Satz: (Differenzierbarkeit von I)

Das Funktional I ist in allen Punkten $g \in A$ stetig, stetig Fréchet-differenzierbar bezüglich der $\|\cdot\|_T$ -Norm und der Gradient ∇I_g mit der Darstellung

$$(3.1.4) \quad I_g' h = \int_0^T (\nabla I_g)(t) h(t) dt$$

ist Lösung des adjungierten Systems ($s := S(g)$):

$$(w_{xx} + w_t)(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega(s),$$

$$(3.1.5) \quad w(x, T) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad w_x(s(t), t) = -\Delta s(t),$$

$$\nabla I_g(t) = \int_t^T w_x(0, \tau) d\tau.$$

Beweis:

a) Stetigkeit: S ist nach Lemma (2.1.12) stetig auf $A \implies \tilde{S} - S(g)$ ist stetig. $\implies \|\tilde{S} - S(g)\|_2^2$ ist stetig. *

b) Differenzierbarkeit: Seien $g, g+h \in A$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} I(g+h) - I(g) &= \frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{S} - S(g+h)]^2(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{S} - S(g)]^2(t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T [2\tilde{S} - (S(g+h) + S(g))](t) [S(g+h) - S(g)](t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{S} - S(g)](t) [S(g+h) - S(g)](t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T [S(g+h) - S(g)]^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \Delta s(t) (S_g' h)(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \Delta s(t) [S(g+h) - S(g) - S_g' h](t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T [S(g+h) - S(g)]^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \Delta s(t) (S_g' h)(t) dt + c_1(h) + c_2(h), \end{aligned}$$

wobei nach Satz (2.6.5) $|c_1(h)| = O(\|h\|_T^2)$,

und nach Lemma (2.1.12) $|c_2(h)| = O(\|h\|_T^2)$ ist.

Damit ist I_g F-differenzierbar, und $I'_g h$ hat die Darstellung:

$$(3.1.6) \quad I'_g h = \int_0^T \Delta s(t) (S'_g h)(t) dt = \int_0^T \Delta s(t) \delta s(t) dt$$

(Selbstverständlich hätten wir (3.1.6) auch mit der Kettenregel berechnen können.) Die Stetigkeit der F-Ableitung folgt aus Satz (2.7.1). Um die Darstellung (3.1.5) zu beweisen, müssen wir den zu S'_g bezüglich des L_2 -Skalarproduktes adjungierten Operator S'^*_g berechnen, denn wegen (3.1.6) gilt formal:

$$I'_g h = (\Delta s, S'_g h)_2 = (S'^*_g \Delta s, h)_2.$$

$$\text{Wir zeigen: } S'^*_g: C[0, T] \rightarrow C[0, T], \quad \Delta s \mapsto \int_0^T w_x(0, \tau) d\tau,$$

wobei w die Lösung des Randwertproblems (3.1.5) ist. Dazu integrieren wir die Greensche Identität $w L y - y L^* w = 0$ über $\Omega(s)$, wobei y die Lösung des Randwertproblems (2.4.2,3) ist, und setzen die Randbedingungen ein:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^s [w(y_{xx} - y_t) - y(w_{xx} + w_t)](x, t) dx dt = \\ &= - \int_0^T \int_0^s \frac{\partial}{\partial t} (wy)(x, t) dx dt + \int_0^T \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} (wy_x - yw_x)(x, t) dx dt = \\ &= - \int_0^T \left[\frac{1}{2} \int_0^s \frac{\partial}{\partial t} (wy)(x, t) dx - \int_0^s (wy_t)(x, t) dx \right] dt + \int_0^T [wy_x - yw_x](0, t) dt = \\ &= - \int_0^s (wy_t)(x, t) dx + \int_0^b (wy)(x, 0) dx + \int_0^T \dot{s}(t) (wy)(s(t), t) dt + \\ &\quad + \int_0^T [wy_x - yw_x](s(t), t) dt - \int_0^T [wy_x - yw_x](0, t) dt = \\ &= \int_0^T w(s(t), t) [\dot{s}(t) y(s(t), t) + y_x(s(t), t)] dt - \int_0^T (yw_x)(s(t), t) dt - \\ &\quad - \int_0^T [wy_x - yw_x](0, t) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T \delta s(t) \Delta s(t) dt - \int_0^T w_x(0, t) \int_0^t h(\tau) d\tau dt = \\
 &= \int_0^T \delta s(t) \Delta s(t) dt + \int_0^T w_x(0, \tau) d\tau \int_0^t h(\tau) d\tau \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T h(t) \int_0^T w_x(0, \tau) d\tau dt = \\
 &= (\Delta s, S_g' h)_2 - (\int_0^T w_x(0, \tau) d\tau, h)_2 .
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

**

Wir haben in der Formulierung des Satzes (3.1.3) die L_2 -Nomenklatur verwendet, obwohl wir I als Funktional auf dem Banachraum $B = (C[0, T], \|\cdot\|_T)$ betrachten, in dem ein Gradient der Form (3.1.5) i.a. nicht existiert (da B kein Hilbertraum ist). In unserem Fall jedoch ist ∇I_g sogar stetig differenzierbar und kann direkt als Lösung des Randwertproblems (3.1.5) berechnet werden (Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit der Lösung w von (3.1.5) folgen aus Standardsätzen, z.B. Friedman [36, Kap. 5]).

Aus dem Randwertproblem (3.1.5) für die adjungierte WLG erhält man durch eine einfache Transformation wieder eine Randwertaufgabe für die WLG. Dies ist der Inhalt des nächsten Korollars.

(3.1.7) Korollar:

Sei $r(t) = s(T-t)$. Dann besitzt ∇I_g die Darstellung:

$$(3.1.8) \quad \nabla I_g(t) = \int_0^{T-t} v_x(0, \tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T$$

wobei v die Lösung des folgenden Randwertproblems ist:

$$\begin{aligned}
 &Lv = 0 \quad \text{in } \Omega(r), \\
 (3.1.9) \quad &v|_{T, 0} = 0, \quad v|_{0, T} = 0, \quad v_x(r(t), t) = -\Delta r(T-t).
 \end{aligned}$$

Beweis:

Die Transformation lautet: $\tau = T-t$, $\xi = x$, $v(\xi, \tau) = w(x, t)$.
Nachrechnen und Übergang zu den alten Bezeichnungen x, t liefern die Behauptung.

**

(3.1.10) Satz:

Das Funktional I besitzt höchstens einen stationären Punkt $g^* \in A$ (d.h. $\nabla I_{g^*} = 0$), und die Funktion g^* löst, falls sie existiert, das ISP.

Beweis:

Sei g^* ein stationärer Punkt. $\Rightarrow \nabla I_{g^*} = 0 \Rightarrow$ Für alle $t \in [0, T]$ ist $v(0, t) = v_x(0, t) = 0$. Da das nichtcharakteristische Anfangswertproblem für die WLG höchstens eine Lösung besitzt (Cannon [9]), folgt daraus $v \equiv 0$ und damit $\Delta s \equiv 0$.
 $\Rightarrow I(g^*) = 0$ und $S(g^*) = \tilde{s}$. g^* ist als Lösung des ISPs eindeutig bestimmt und deshalb einziger stationärer Punkt von I .

**

Die Frage nach der Existenz von g^* wollen wir in diesem Abschnitt ausklammern, da wir bei der Behandlung des T-Approximationsproblems näher darauf eingehen werden.

Das nächste Korollar gibt Auskunft, wie der Gradient ∇I_g zu berechnen ist, falls I auf einem endlichdimensionalen Teilraum $V \subset C[0, T]$ minimiert wird.

(3.1.11) Korollar:

Sei $V \subset C[0, T]$, $\dim V = n$, $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, $A' := \{a \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i v_i \leq 0\}$

und $J: A' \rightarrow \mathbb{R}$, $a \mapsto \sum_{i=1}^n a_i v_i \mapsto I(\sum_{i=1}^n a_i v_i)$. Dann gilt:

J ist auf A' stetig differenzierbar und der Gradient ∇J_a besitzt die Darstellung:

$$(3.1.12) \quad (vJ_a)_i = \int_0^T v_i(t) \int_0^{T-t} v_x(0, \tau) d\tau dt, \quad ,$$

wobei v die Lösung des Randwertproblems (3.1.9) ist.

Beweis: Folgt aus Satz (3.1.3) und Korollar (3.1.7) **

Trotz der Tatsache, daß I höchstens einen stationären Punkt besitzt, ist I im allgemeinen nicht konvex. Dies läßt sich präzisieren:

(3.1.13) Satz:

Zu jedem $g \in A$ existiert ein zu approximierender Rand $\tilde{s}$, sodaß das Funktional I nicht konvex ist.

Beweis:

Wir zeigen:

$$\bigwedge_{g \in A} \quad \bigvee_{\substack{h \in C[0, T] \\ g+h \in A}} \quad \bigvee_{\tilde{s} \in C[0, T]} \quad [(I'_{g+h} - I'_g)h](t) < 0 \quad .$$

Sei g gegeben. Wir wählen h so, daß $g+h \in A$ und $\delta \bar{s} := S'_{g+h} h \neq \delta s := S'_g h$ ist. Weiter sei $\bar{s} := S(g+h)$ und $\Delta \bar{s} := \bar{s} - \tilde{s}$. Dann gilt wegen (3.1.6):

$$\begin{aligned} (I'_{g+h} - I'_g)(h)(t) &= \int_0^T [\Delta \bar{s} \delta \bar{s} - \Delta s \delta s](t) dt = \\ &= \int_0^T \Delta s(t) (\delta \bar{s} - \delta s)(t) dt + \int_0^T \delta \bar{s}(t) (\Delta \bar{s} - \Delta s)(t) dt = \\ &= \int_0^T \Delta s(t) (\delta \bar{s} - \delta s)(t) dt + \int_0^T \delta \bar{s}(t) (\bar{s} - s)(t) dt . \end{aligned}$$

Das letzte Integral hängt nicht von $\tilde{s}$ ab. Wir wählen $\Delta s = -\alpha(\delta \bar{s} - \delta s)$, d.h. $\tilde{s} = s + \alpha(\delta \bar{s} - \delta s)$. Dann ist für hinreichend großes α die rechte Seite negativ. **

Mit Satz (3.1.3), Korollar (3.1.7), Satz (3.1.10) und Satz (3.1.13) haben wir im wesentlichen alle für die Anwendung wichtigen Eigenschaften des L_2 -Fehlerfunktional charakterisiert. Da I zwar nicht konvex ist, aber auch keine Nebenminima besitzt, bietet sich zur numerischen Berechnung der besten Approximation $s^* = S(g^*)$ ein projiziertes Gradientenverfahren an. Allerdings müssen dabei in jedem Abstiegschritt wenigstens zwei Randwertprobleme (zur Auswertung von I und zur Berechnung von ∇I), bei der eindimensionalen Minimierung in Richtung des negativen Gradienten pro Funktionsauswertung von I sogar zusätzlich noch je ein FRWP gelöst werden, sodaß das Verfahren, mindestens für den Fall einer schlechten Startkontrolle g_0 , recht aufwendig erscheint.

In Anbetracht des unbefriedigenden Konvergenzverhaltens (lineare Konvergenz) des Gradientenverfahrens scheint uns die L_2 -Approximation des Randes gegenüber der L_∞ -Approximation, für die wir ein quadratisch konvergentes Verfahren angeben und die quadratische Konvergenz beweisen können, nicht konkurrenzfähig, ganz abgesehen davon, daß eine gleichmäßige Approximation i.a. attraktiver erscheint, als die L_2 -Approximation.

Wir werden uns daher im Folgenden nur noch mit der gleichmäßigen Approximation von $\tilde{s}$ befassen.

3.2 Existenz einer besten L_∞ -Approximation

Sei V ein linearer Teilraum von $C[0,T]$. Unser nichtlineares Approximationsproblem lautet jetzt:

Suche ein $g^* \in A \cap V$, sodaß

$$(3.2.1) \quad \|\tilde{s} - S(g^*)\|_T = \inf\{\|\tilde{s} - S(g)\|_T \mid g \in A \cap V\} =: \rho_V(\tilde{s}) !$$

Wir beschäftigen uns zuerst mit der Existenzfrage. Für line-

are Approximationsaufgaben auf endlichdimensionalen Teilräumen eines normierten linearen Raumes läßt sich die Existenzfrage bekanntlich einfach beantworten: Es genügt offensichtlich, die Approximationsaufgabe auf einer kompakten Teilmenge K des endlichdimensionalen Teilraumes V zu betrachten (da sich der Approximationsfehler für Konkurrenzfunktionen außerhalb K leicht nach unten abschätzen läßt), woraus sich, infolge der Stetigkeit der Norm, sofort die Existenz einer besten Approximation ergibt.

Für nichtlineare Approximationsaufgaben treten schon im endlichdimensionalen Fall erhebliche Schwierigkeiten auf. So kann man sich beispielsweise beim Aufsuchen einer optimalen Parameterfunktion $g^* \in V$ oft nicht auf ein Kompaktum zurückziehen. Dies bedeutet für numerische Zwecke, daß die Parameterfunktionen g_n einer Minimalfolge $S(g_n)$, deren Fehlernorm gegen den Minimalabstand $\rho_V(\tilde{s})$ strebt, für $n \rightarrow \infty$ nicht beschränkt bleiben.

Für unser spezielles Approximationsproblem (3.2.1) gelingt es jedoch, zumindest im endlichdimensionalen Fall, die Existenzfrage positiv zu beantworten. Allerdings wird sich zeigen, daß die Abschätzung des Zusammenhangs zwischen Fehler- und Parameternorm wesentlich komplizierter ist als im linearen Fall.

(3.2.2) Satz: (Existenz einer besten Approximation)

Sei $\tilde{s} \in B$, $\tilde{s}(0) = b$, der zu approximierende Rand, $V \subset B$, $\dim(V) = n$, ein endlichdimensionaler Teilraum und $V_{ad} := V \cap A$ die Menge der zulässigen Steuerungen. Dann gilt:

$$(3.2.3) \quad \forall v^* \in V_{ad} \quad \|S(v^*) - \tilde{s}\|_T = \inf_{v \in V_{ad}} \|S(v) - \tilde{s}\|_T = \rho_V(\tilde{s}) \quad .$$

Beweis:

Sei $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Basis von V , d.h. $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Für $v \in V_{ad}$, $v = \sum_{i=1}^n v_i$, schreiben wir $S(a)$ anstatt $S(v)$, ohne Ver-

wechslungen befürchten zu müssen. Wie im linearen Fall werden wir zeigen, daß es genügt, das Fehlerfunktional $\varphi(a) := \|\tilde{s} - S(a)\|_T$ auf einer kompakten Menge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ zu minimieren. Aus der Stetigkeit von S und der T -Norm $\|\cdot\|_T$ folgt dann die Behauptung.

Wegen $\rho_V(\tilde{s}) \leq \|S(0) - \tilde{s}\|_T$ und der Monotonie der Ränder $s \in S(V_{ad})$ genügt es, nur solche Ränder zur Konkurrenz zuzulassen, die der Einschließung

$$b \leq s(t) \leq \|\tilde{s}\|_T + \|S(0) - \tilde{s}\|_T =: M, \quad (3.2.3)$$

genügen, da alle anderen Ränder $s \in S(V_{ad})$ schlechtere Approximationen an $\tilde{s}$ als $S(0)$ sind. Sei also

$$(3.2.4) \quad \bigwedge_{t \in [0, T]} b \leq S(a)(t) \leq M.$$

Wir werden daraus Restriktionen für den Parametervektor $a \in \mathbb{R}^n$ ableiten. Dazu ersetzen wir zunächst (3.2.4) durch die Einschließung einer Funktion $w(a)$, die die Lösung eines Randwertproblems mit festem Rand ist.

Nach (2.1.7) besitzt der Rand $S(v(a))$ die Darstellung:

$$(3.2.5) \quad w(x, t) = b - \int_0^t v(\tau) d\tau - \int_0^x u(x, \tau) dx + \int_0^b f(x) dx.$$

Sei $w = w(a)$ die Lösung des Randwertproblems

$$(3.2.6) \quad \begin{aligned} Lw(x, t) &= 0, & 0 < x < M, & \quad 0 < t \leq T, \\ w(x, 0) &= \begin{cases} f(x), & x \in [0, b], \\ 0, & x \in (b, M], \end{cases} \\ w_x(0, t) &= v(t), & w(M, t) &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $v \leq 0$ und $f \geq 0$ ist $w \geq 0$ und damit $w(s(\cdot), \cdot) \geq 0$.

Das MP impliziert für die zu s gehörige Funktion u und alle $(x,t) \in \Omega(s)$: $u(x,t) \leq w(x,t)$. Mit (3.2.5) erhalten wir:

$$\begin{aligned} (3.2.7) \quad s(t) &\geq b - \int_0^t v(\tau) d\tau - \int_0^{s(t)} w(x,t) dx + \int_0^b f(x) dx \geq \\ &\geq b - \int_0^t v(\tau) d\tau - \int_0^M w(x,t) dx + \int_0^b f(x) dx . \end{aligned}$$

Wir berechnen das vorletzte Integral:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_0^M [w_t - w_{xx}](x,\tau) dx d\tau = \int_0^M w(x,t) dx - \int_0^M w(x,0) dx - \\ &\quad - \int_0^t w_x(M,\tau) d\tau + \int_0^t w_x(0,\tau) d\tau = \\ &= \int_0^M w(x,t) dx - \int_0^b f(x) dx - \int_0^t w_x(M,\tau) d\tau + \int_0^t v(\tau) d\tau . \end{aligned}$$

Eingesetzt in (3.2.7) ergibt sich:

$$(3.2.8) \quad s(t) \geq b - \int_0^t w_x(M,\tau) d\tau .$$

Wegen $w \geq 0$ und $w(M,\cdot) = 0$ ist $w_x(M,\cdot) \leq 0$. Mit (3.2.8) und (3.2.4) erhalten wir daher folgende Einschließung:

$$(3.2.9) \quad 0 \leq \bigwedge_{0 \leq t \leq T} 0 \leq - \int_0^t w_x(M,\tau) d\tau \leq s(t) - b \leq s(t) \leq M .$$

Da w über die linke Randbedingung von a abhängt, können wir (3.2.9) verwenden, um Schranken für eine $\mathbb{R}^n$ -Norm von a zu berechnen.

Dazu leiten wir eine Integralgleichung für die Funktion $w_x(M, \cdot)$ her. Nach Formel (2.1.20) besitzt w die Darstellung:

$$w(x, t) = - \int_0^t N(x, t, 0, \tau) v(\tau) d\tau + \int_0^t N(x, t, M, \tau) w_x(M, \tau) d\tau + \\ + \int_0^b N(x, t, \xi, 0) f(\xi) d\xi \quad .$$

Durch Differentiation nach x unter den Integralen und Bildung des Grenzwertes $x \rightarrow M$ erhalten wir unter Beachtung der Sprungrelation (2.1.17) nach Umstellen und Multiplikation mit 2 die Volterrasche Integralgleichung:

$$(3.2.10) \quad w_x(M, t) - 2 \int_0^t N_x(M, t, M, \tau) w_x(M, \tau) d\tau = \\ = - 2 \int_0^t N_x(M, t, 0, \tau) v(\tau) d\tau + 2 \int_0^b N_x(M, t, \xi, 0) f(\xi) d\xi \quad .$$

Der Kern des letzten Integrals besitzt wegen $M > b$ für $t \rightarrow 0$ keine Singularität mehr. Wir schätzen die Kerne ab:

$$N_x(M, t, M, \tau) = \frac{-M}{2\pi^{1/2}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{\frac{-M^2}{t-\tau}\right\} < 0 \quad \text{für } t > \tau ,$$

$$N_x(M, t, 0, \tau) = \frac{-M}{2\pi^{1/2}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{\frac{-M^2}{4(t-\tau)}\right\} < 0 \quad \text{für } t > \tau ,$$

$$N_x(M, t, \xi, 0) = \frac{-1}{4\pi^{1/2}t^{3/2}} \left\{ (M-\xi) \exp\left\{\frac{-(M-\xi)^2}{4t}\right\} + \right. \\ \left. + (M+\xi) \exp\left\{\frac{-(M+\xi)^2}{4t}\right\} \right\} < 0 \quad \text{für } \xi \leq M .$$

Aus der Abschätzung der Funktion $g_{\alpha, M}$ im Beweis von Lemma 3.2.10 folgt:

$$|N_x(M, t, M, \tau)| \leq \frac{M}{2\pi^{1/2}} \left(\frac{3}{2eM^2}\right)^{3/2} \leq \frac{1}{2\pi^{1/2}M^2}.$$

Wir setzen die Ungleichungen in (3.2.10) ein und beachten die Vorzeichen von v , w_x und f :

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 \int_0^t \frac{-Mv(\tau)}{2\pi^{1/2}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{\frac{-M^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau = -w_x(M, t) + \\ &+ 2 \int_0^t (-N_x(M, t, M, \tau))(-w_x(M, \tau)) d\tau - 2 \int_0^b (-N_x(M, t, \varepsilon, 0))f(\xi) d\xi \leq \\ &\leq -w_x(M, t) + \frac{1}{\pi^{1/2}M^2} \int_0^t (-w_x(M, \tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Wir integrieren von 0 bis t und nützen zweimal (3.2.9) aus:

$$0 \leq 2 \int_0^t \int_0^r \frac{-Mv(\tau)}{2\pi^{1/2}(r-\tau)^{3/2}} \exp\left\{\frac{-M^2}{4(r-\tau)}\right\} d\tau dr \leq M + \frac{t}{\pi^{1/2}M}.$$

Schreiben wir für $v = \sum a_i v_i$ und setzen ein, so erhalten wir die folgenden Restriktionen für a :

$$\begin{aligned} (3.2.11) \quad 0 &\leq \sum_{i=1}^n a_i \left\{ \int_0^t \int_0^r \frac{-Mv_i(\tau)}{2\pi^{1/2}(r-\tau)^{3/2}} \exp\left\{\frac{-M^2}{4(r-\tau)}\right\} d\tau dr \right\} \leq \\ &\leq M + \frac{t}{\pi^{1/2}M}. \end{aligned}$$

Die Einschließung (3.2.11) gilt für alle $t \in [0, T]$. Wir bezeichnen den in geschweiften Klammern stehenden Ausdruck mit $\varphi_i(t)$ und zeigen die lineare Unabhängigkeit der φ_i :
Die Funktion

$$w(M, r) := \int_0^r \frac{-v_M(\tau)}{2\pi^{1/2}(r-\tau)^{3/2}} \exp\left\{\frac{-M^2}{4(r-\tau)}\right\} d\tau,$$

ist für alle $\mu \in [0, T]$ die Lösung des folgenden Randwertproblems:

$$LW(M, r) = 0, \quad 0 < M < \infty, \quad 0 < r \leq T,$$

$$W(M, 0) = 0, \quad 0 < M < \infty, \quad W(0, r) = -\mu(r), \quad 0 \leq r \leq T.$$

Ist für ein $M > 0$ für alle $t \in [0, T]$ $W(M, t) = 0$, so ist aufgrund des MPs $W \equiv 0$ im Streifen $[M, \infty) \times [0, T]$. Da W bezüglich der Ortsvariablen in $(0, \infty) \times [0, T]$ analytisch ist, ist dann im ganzen Streifen $[0, \infty) \times [0, T]$ $W \equiv 0$. Wir erhalten die Implikation:

$$(3.2.12) \quad \bigwedge_{t \in [0, T]} W(M, t) = 0 \implies \mu \equiv 0.$$

Wir können jetzt die lineare Unabhängigkeit der φ_i beweisen:

$$\text{Sei } \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{\varphi}_i = 0 \implies \bigwedge_{0 \leq r \leq T} \int_0^r \frac{-M \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i(\tau)}{2\pi^{1/2}(r-\tau)^{3/2}} \exp\left\{\frac{-M^2}{4(r-\tau)}\right\} d\tau = 0 \implies ((3.2.12)) \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0.$$

$$\implies \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \alpha_i = 0 \implies \text{Die } \varphi_i \text{ sind linear unabhängig.}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der φ_i gibt es Punkte $0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq T$ mit $\det(\varphi_i(t_j)) \neq 0$ (Cheney [21, S.79]). Mit Ungleichung (3.2.11) gilt also:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t_j) \leq M + \frac{j}{\pi^{1/2}M} \leq M + \frac{T}{\pi^{1/2}M} =: C.$$

Für die Matrix $\tilde{\Phi} := (\varphi_i(t_j))^T$ und die Vektoren $d := \tilde{\Phi}a$, $e := (C, \dots, C)^T$ folgt: $0 \leq d \leq e$ (komponentenweise). $\implies \|d\|_\infty \leq \|e\|_\infty \implies \|a\|_\infty = \|\tilde{\Phi}^{-1}d\|_\infty \leq \|\tilde{\Phi}^{-1}\|_\infty \|d\|_\infty \leq \|\tilde{\Phi}^{-1}\|_\infty C$.

Damit ist a aus der kompakten Menge $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq C\}$, wobei $C = C \|\tilde{\Phi}^{-1}\|_\infty$ nicht von a abhängt. Das war zu zeigen

**

Satz (3.2.2) macht keine Aussage über die Größe des Minimalabstandes $\rho_V(\tilde{s})$. Ist V_n eine aufsteigende Folge von linearen Teilräumen, d.h. $\dim(V_n)=n$ und $V_n \subset V_{n+1}$, und liegt die Vereinigung der V_n dicht in B , so konvergiert wegen der Stetigkeit von S $\rho_{V_n}(\tilde{s})$ gegen 0, falls $\tilde{s}=S(g)$ für ein $g \in A$ ist, d.h., falls das ISP für $\tilde{s}$ lösbar ist. Ist sogar die Ordnung von n bekannt, mit der der Abstand zwischen g und V_n für $n \rightarrow \infty$ klein wird, so läßt sich diese Aussage noch präzisieren:

(3.2.13) Lemma:

Ist das ISP für $\tilde{s}$ lösbar, d.h. $\tilde{s}=S(g)$ für ein $g \in A$, und läßt sich der Abstand zwischen g und V_n durch die Relation

$$\inf\{\|g-v\|_T \mid v \in V_n \cap A\} \leq C n^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

abschätzen, so konvergiert der Minimalabstand $\rho_V(\tilde{s})$ mit der gleichen Ordnung gegen 0, d.h. $\rho_{V_n}(\tilde{s}) \leq \tilde{C} n^{-\alpha}$.

Beweis:

Sei $\bar{v}_n$ eine beste Approximation aus $V_n \cap A$ an g . Dann gilt wegen Lemma (2.1.12):

$$\begin{aligned} \rho_{V_n}(\tilde{s}) &= \inf\{\|S(v)-\tilde{s}\|_T \mid v \in V_n \cap A\} = \|S(v_n^*)-S(g)\|_T \leq \\ &\leq \|S(\bar{v}_n)-S(g)\|_T \leq C_1 \|\bar{v}_n - g\|_T \leq C_1 C n^{-\alpha} =: \tilde{C} n^{-\alpha}. \end{aligned} \quad \dots$$

Lemma (3.2.13) läßt noch viele Fragen offen. Es liefert erst dann ein sinnvoll überprüfbares Genauigkeitskriterium, wenn die Lösbarkeit des ISPs a priori beurteilt werden kann. Es macht außerdem keine Angaben zu der für den Anwender wichtigen Frage, ob auch die Folge (v_n^*) der optimalen Kontrollen gegen die Lösung des ISPs konvergiert und, wenn ja, mit welcher Ordnung von n .

Zur Beantwortung der ersten Frage stehen einige wenigstens notwendige Kriterien zur Verfügung. So besagt (2.1.10), daß

$s \in C^\infty(0, T)$ sein muß. Unter Benutzung eines Satzes von Friedman [35] konnten erst kürzlich Kinderlehrer und Nirenberg [51] dieses Kriterium präzisieren:

Eine Funktion $s \in C^\infty(0, T)$ gehört per definitionem zur Gevrey-Klasse α (Hadamard [42]), falls sich die Folge der Ableitungen durch

$$|s^{(n)}(t)| \leq M (\alpha n)! \gamma^{-n}, \quad M > 0, \quad \gamma > 0,$$

mit von n unabhängigen Konstanten M und γ majorisieren läßt (Gevrey-Klasse 1 sind die in $(0, T)$ analytischen Funktionen). Nach Kinderlehrer und Nirenberg [51] ist für die Lösbarkeit des speziellen nichtcharakteristischen Cauchy-Anfangswertproblems für die WLG

$$\begin{aligned} (3.2.14) \quad & Lu(x, t) = 0, \quad x < s(t), \quad 0 < t < T, \\ & u(s(t), t) = 0, \quad u_x(s(t), t) = -\dot{s}(t), \end{aligned}$$

in einer Umgebung von s notwendig und hinreichend, daß s ein Element der Gevrey-Klasse 2 ist (dazu gehören z.B. als Grenzfall die bekannten "mollifier"-Funktionen $\exp\{-1/(t-\tau)^2\}$). Die Notwendigkeit wurde für einen Spezialfall des nichtcharakteristischen Cauchy-Problems bereits von Holmgren [48] bewiesen. Man beachte aber, daß die Lösung von (3.2.14) bereits ohne die Vorschrift einer Anfangstemperaturverteilung $u(x, 0) = f(x)$ eindeutig bestimmt ist. Hill [43] konnte die Lösung des Cauchy-Problems (3.2.14) sogar formal explizit angeben:

$$(3.2.15) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} (x-s(t))^{2n}.$$

Man rechnet leicht nach, daß die Reihe (3.2.15) für Funktionen s aus der Gevrey-Klasse 2 in einer Umgebung von s gleichmäßig konvergiert und daher die Lösung von (3.2.14) (lokal) darstellt. Selbstverständlich ist die Gevrey-Klasse 2 dicht

in B. Es wäre nun interessant zu wissen, ob auch die monotonen Ränder s , die eine Lösung des durch die zusätzliche Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ ergänzten Problems (3.2.14), des ISPs, zulassen, dicht liegen in der Menge aller stetigen monotonen Funktionen $\tilde{s}$ mit $\tilde{s}(0)=b$. Denn dann ließe sich jede stetige monotone Funktion $\tilde{s}$ beliebig genau durch einen freien Rand approximieren, und Lemma (3.2.13) wäre ohne die Voraussetzung der Lösbarkeit des ISPs anwendbar. Die Beantwortung dieser Frage steht allerdings noch aus.

Was die Frage nach dem Verhalten der Folge (v_n^*) , der optimalen Kontrollen, angeht, so wird man zunächst, infolge der Inkorrektheit der Problemstellung (Pucci [63], Hill [43]), keine Konvergenz gegen die Lösung g des ISPs, ja nicht einmal die Beschränktheit der Folge $(\|v_n^*\|_T)$ erwarten dürfen. Allerdings darf dabei nicht übersehen werden, daß das Approximationsproblem (3.2.1) immer unter der zusätzlichen Restriktion $v_n^* \in A$ gelöst wird, und sich derartige Bedingungen regularisierend auswirken (Pucci [63], Eckhard [32], Cannon [9]). In [9] wird z.B. bei Vorliegen einer solchen zusätzlichen Regularitätsbedingung die Hölder-stetige Abhängigkeit der Lösung u des nichtcharakteristischen Cauchy-Problems (3.2.14) von den Randdaten bewiesen.

Inwieweit sich die Beweisideen auf unsere Problematik übertragen lassen, konnte bisher nicht geklärt werden, sodaß wir auch diese Frage offen lassen müssen. Wir werden uns in den folgenden Abschnitten mit Eindeutigkeitsfragen befassen.

3.3 Regularität des Tangentialraumes

Sei ab jetzt $V \subset B$ ein endlichdimensionaler linearer Teilraum von B mit $\dim(V)=n$.

(3.3.1) Satz:

Für alle $g \in A$ ist der Ableitungsoperator S'_g injektiv.

Beweis:

Wir zeigen, daß der Kern von S'_g nur aus der Nullfunktion besteht.

Sei $h \in B$ und $S'_g h = \delta s = 0$. Es ist $\delta s = y(s(\cdot), \cdot)$, wobei y die Lösung des Randwertproblems (2.4.2) ist. $\Rightarrow$

$y(s(\cdot), \cdot) = y_x(s(\cdot), \cdot) = 0$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung des nichtcharakteristischen Cauchy-Problems ist damit $y \equiv 0$ und deshalb $h = 0$. Das war zu zeigen. **

Wir benötigen den Begriff des "Tangentialraumes":

3.3. Definition:

Der lineare Teilraum von B , der durch die Abbildung von V mittels S'_g entsteht, heißt Tangentialraum (TR) von S und V im Punkt g und wird mit $S'_g(V)$ bezeichnet. **

Mit dieser Definition gilt trivialerweise das folgende Korollar zu Satz (3.3.1):

(3.3.3) Korollar: (Regularität des Tangentialraumes)

Der TR $W = S'_g(V)$ ist in jedem Punkt $g \in A$ regulär, d.h. $\dim(W) = n$.

Beweis:

$S'_g: V \rightarrow W$ ist linear und bijektiv, also sind V und W isomorph. * *

Wir erwähnen der Vollständigkeit halber noch, daß aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung des ISPs S injektiv ist und damit eine zu einer besten Approximation s^* von $\tilde{s}$ gehörige optimale Kontrolle v^* eindeutig bestimmt ist. Wir sprechen daher in Zukunft von der zu s^* gehörigen optimalen Kontrolle.

3.4 Haarsche Bedingung

Wir schaffen in diesem Abschnitt die Voraussetzungen zum Beweis der Eindeutigkeit der besten Approximation s^* und deren Charakterisierung durch einen verallgemeinerten Alternantensatz. Dabei spielen die Begriffe "globale" und "lokale Haarsche Bedingung" eine zentrale Rolle. Wir übernehmen von Meinardus [55] die folgende

(3.4.1) Definition:

Sei $F: A \rightarrow C[a,b]$ eine F -differenzierbare Parametrisierung, und für jedes $g \in A$ sei $d(g)$ die Dimension des Tangentialraumes $F'_g(V)$ im Punkt g . Dann erfüllt die (i.a. nichtlineare) Menge $F(A)$ die globale Haarsche Bedingung (GHB) genau dann, wenn in jedem Punkt $g \in A$ die Funktion $F(g) - F(h)$ für alle $h \in A$ höchstens $d(g)-1$ (verschiedene) Nullstellen besitzt oder identisch verschwindet. $F(A)$ erfüllt die lokale Haarsche Bedingung (LHB) genau dann, wenn in jedem Punkt $g \in A$ der Tangentialraum $F'_g(V)$ der Haarschen Bedingung (HB) genügt, d.h., wenn jede Funktion $F'_g(h)$ höchstens $d(g)-1$ (verschiedene) Nullstellen besitzt oder identisch verschwindet.

**

Die Erfüllung dieser Bedingungen durch den nichtlinearen Operator S hängt von der Erfüllung der gewöhnlichen HB im Ansatzraum V ab, wie die beiden nächsten Sätze zeigen werden. Zu deren Formulierung benötigen wir einen auf unsere Zwecke zugeschnittenen Begriff der Vielfachheit einer Nullstelle.

(3.4.2) Definition:

Sei $f \in B$ und $f(t_0) = 0$. Die Zahl

$$V(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f \text{ in } t_0 \text{ sein Vorzeichen wechselt,} \\ 2, & \text{falls } f \text{ in } t_0 \text{ sein Vorzeichen nicht wechselt,} \end{cases}$$

heißt Vielfachheit der Nullstelle t_0 von f .

(3.4.3) Satz: (Nullstellensatz für die Differenz zweier Ränder)

Seien $g, \bar{g} \in A$, $h := \bar{g} - g$, $s := S(g)$, $\bar{s} := S(\bar{g})$ und $\Delta s := \bar{s} - s$. Die Funktion Δs besitze genau die k getrennten Nullstellen

$$0 < \tau_1 < \dots < \tau_k \quad \text{und es sei} \quad m = \sum_{i=1}^k V(\tau_i) .$$

Dann gibt es mindestens $m+1$ Zahlen $0 = \gamma_0 < \dots < \gamma_m$ und m Nullstellen $0 < t_1 < \dots < t_m$ von h mit der Eigenschaft:

$$(3.4.4) \quad 1 \leq i \leq m \quad h(t_i) = 0, \quad t_i \in (\gamma_{i-1}, \gamma_i), \quad h \text{ wechselt in } (\gamma_{i-1}, \gamma_i) \text{ sein Vorzeichen.}$$

Beweis:

Wechselt h unendlich oft sein Vorzeichen in $[0, T]$, so ist alles bewiesen. Wir nehmen also an, daß h sein Vorzeichen nur endlich oft wechselt.

Sei α die stetige, stückweise differenzierbare Kurve $\alpha(t) = \min(s(t), \bar{s}(t))$ und $w = \bar{u} - u$ in $\Omega(\alpha)$. Wir betrachten Niveauebenen $\Gamma_i \subset \bar{\Omega}(\alpha)$ mit der Eigenschaft $w|_{\Gamma_i} = 0$ und $(s(\tau_i), \tau_i) = (\bar{s}(\tau_i), \tau_i) \in \Gamma_i$ (eine ähnliche Beweismethode wurde von Friedman und Jensen [40] zum Nachweis der Konvexität des freien Randes unter bestimmten Voraussetzungen an die Anfangsfunktion f benutzt). Wir werden zeigen, daß die Γ_i differenzierbare, in Richtung t -Achse monoton fallende Kurven sind, die die t -Achse in den Punkten γ_i schneiden. Dazu zeigen wir die folgende über die Behauptung des Satzes hinausgehende Aussage durch Induktion.

Behauptung: Zu jeder Nullstelle τ_i von Δs mit $V(\tau_i) = 1$ existiert eine stetig differenzierbare Niveaulinie Γ_j mit

$$(3.4.5) \quad \Gamma_j := \{(x, t) \in \Omega(\alpha) \mid x = \varphi(\tau_j), w(\varphi(\tau_j), t) = 0, \varphi(\tau_{i-1}) < \varphi(\tau_i) = \bar{s}(\tau_i), \zeta(\gamma_j) = 0, \bigwedge_{\gamma_j < t \leq \tau_j} \zeta(t) \geq 0\}, \quad j \geq \sum_{i=1}^{i-1} V(\tau_i).$$

Dabei ist $\gamma_j > \gamma_{j-1}$. Ist $V(\tau_i) = 2$, so existiert eine zweite Kurve

$$(3.4.6) \quad \Gamma_{j+1} := \{(x, t) \in \Omega(\alpha) \mid x = \varphi(t), w(\varphi(t), t) = 0, \varphi(\tau_i) = s(\tau_i), \varphi(\gamma_{j+1}) = 0, \phi \geq 0\} .$$

h wechselt in (γ_{j-1}, γ_j) bzw. (γ_j, γ_{j+1}) sein Vorzeichen.

Beweis: $k = 1$

Sei $\tau_1 > 0$. O.E. nehmen wir an, daß τ_1 bereits eine "doppelte" Nullstelle von Δs ist, d.h. $V(\tau_1) = 2$, da dies den Fall $V(\tau_1) = 1$ umfaßt. Weiter gehen wir o.E. von der Voraussetzung aus, daß für alle $0 < t < \tau_1$ $\bar{s}(t) > s(t) = \alpha(t)$ ist, da sich anderenfalls nur das Vorzeichen von h umdreht.

Wegen $\Delta s|_{(0, \tau_1)} > 0$ und (2.1.14) existiert ein $\epsilon > 0$, sodaß $h|_{[0, \epsilon]} \leq 0$ ist (h wechselt sein Vorzeichen nur endlich oft!). Das strenge Maximumprinzip (SMP, Friedman [36, S.34]) und $w(s(t), t) > 0$ in $(0, \tau_1)$ implizieren: Für alle $x \in [0, s(\epsilon)]$ ist $w(x, \epsilon) > 0$. Wir führen einige Bezeichnungen ein:

$$D_r := \{(x, t) \in \Omega(s) \mid (x - s(\tau_1))^2 + (t - \tau_1)^2 < r^2, s < \tau_1\}.$$

$$\Gamma_r := \partial D_r = \{(s(t), t) \mid \tau_r \leq t \leq \tau_1\} \cup \{(x, \tau_1) \mid 0 \leq x \leq s(\tau_1)\} \cup \\ \cup \{(x, \epsilon) \mid 0 \leq x \leq s(\epsilon)\}.$$

Γ_r ist der kreisbogenförmige Teil von ∂D_r , u.U. vereinigt mit einem t -Achsenabschnitt.

P_r ist der Schnittpunkt von Γ_r mit s , bzw. Γ_r mit $\{t = \epsilon\}$.

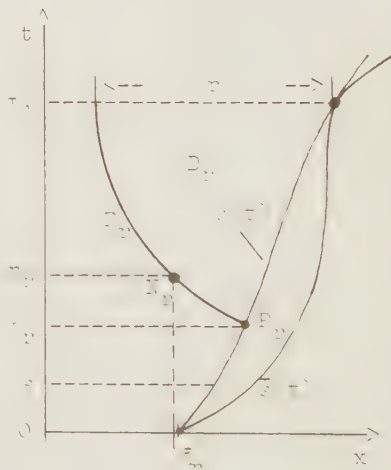
1. Teilbehauptung: Für jedes $r > 0$ liegt auf Γ_r eine Nullstelle N_r von w .
1. Teilbeweis: Für alle $\epsilon \leq t < \tau_1$ gilt: $w(s(t), t) = \bar{u}(s(t), t) > 0$.

Annahme: $w|_{\bar{D}_r} \geq 0 \implies$

(SMP) $w|_{D_r} > 0 \implies w$ nimmt in $(s(\tau_1), \tau_1)$ sein Minimum bezüglich $\bar{D}_r$ an, da $w(s(\tau_1), \tau_1) = (\bar{u} - u)(s(\tau_1), \tau_1) = 0$ ist.

$\implies$ (Hopfsches Lemma, Friedman [36, S.49, Satz 14]) $0 > w_x(s(\tau_1), \tau_1) = \bar{u}_x(\bar{s}(\tau_1), \tau_1) - u_x(s(\tau_1), \tau_1) = -\dot{\bar{s}}(\tau_1) + \dot{s}(\tau_1) \geq 0$. Widerspruch!

w besitzt also in $\bar{D}_r$ ein negatives Minimum, das auf Γ_r angenommen wird. $w|_{\Gamma_r}$ ist eine stetige Funktion, und es gilt:



$w(P_r) > 0$. $\Rightarrow$ w besitzt auf Γ_r eine Nullstelle N_r . *

Sei nun für jedes $r > 0$ N_r diejenige Nullstelle auf Γ_r mit der größten x-Komponente (die Menge der Nullstellen ist abgeschlossen!).

2. Teilbehauptung: Die so gewählten Nullstellen N_r liegen auf einer stetig differenzierbaren Niveaulinie Γ_1 mit den in (3.4.5) behaupteten Eigenschaften.

2. Teilbeweis: w nimmt in N_r sein Minimum bezüglich des parabolischen Gebietes $D'_r := D_r \cap \{t \leq \eta_r\}$ an. Aus der Wahl von N_r und dem SMP folgt: $w|_{D'_r} > 0$. $\Rightarrow$ (Hopfsches Lemma) $w_x(N_r) > 0$. Wegen der Stetigkeit von w_x ist dann in einer ganzen Umgebung $U(N_r) \subset \Omega(s)$ $w_x > 0$. $\Rightarrow$ Das gewöhnliche Anfangswertproblem

$$(3.4.7) \quad \dot{\zeta}(t) = \frac{-w_t(\zeta(t), t)}{w_x(\zeta(t), t)}, \quad \zeta(\eta_r) = \xi_r,$$

besitzt in $U(N_r)$ eine Lösung ζ (Satz von Peano) mit $\zeta(\eta_r) = \xi_r$, $\zeta(0) = 0$, denn es gilt:

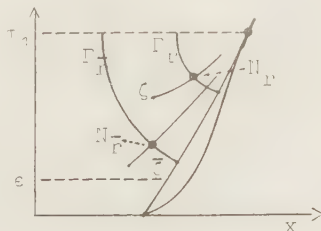
$$\frac{d}{dt} w(\zeta(t), t) = w_x(\zeta(t), t) \dot{\zeta}(t) + w_t(\zeta(t), t) = 0.$$

Außerdem ist $w_t(N_r) \leq 0$. $\Rightarrow$ $\dot{\zeta}(\eta_r) = \frac{-w_t(N_r)}{w_x(N_r)} \geq 0$.

Annahme: Ab einem $\bar{r} > r$ liegt $N_{\bar{r}}$ auf keiner Lösung ζ von (3.4.7). $\Rightarrow$

Die durch $N_{\bar{r}}$ verlaufende Lösung ζ von (3.4.7) mit $\zeta(\eta_{\bar{r}}) = \xi_{\bar{r}}$ schneidet die zwischen $\Gamma_{\bar{r}}$ und Γ_r liegenden Ränder Γ_ρ unterhalb N_ρ , was im Widerspruch zur maximalen Wahl von N_ρ steht.

Es liegen also alle $N_\rho \in U$ auf einer durch N_r verlaufenden Lösung ζ von (3.4.7). Da r jedoch be-



wieder das Hopfsche Lemma anwenden, woraus sich $w_x(s(\tau_1), \tau_1) > 0$ ergibt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta \dot{s}(\tau_1) = \ddot{s}(\tau_1) - \dot{s}(\tau_1) = -\bar{u}_x(s(\tau_1), \tau_1) + u_x(s(\tau_1), \tau_1) = \\ &= -w_x(s(\tau_1), \tau_1) < 0. \quad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

Die Annahme $w|_{\bar{D}_r} \leq 0$ ist also falsch, und w muß auf Γ_r sein positives Maximum annehmen. Wegen $w_x(\zeta(t), t) > 0$ existiert eine Umgebung V von P_r , sodaß $w_x|_{\Gamma_r \cap V} > 0$ ist (Γ_r ist offen).
 $\Rightarrow w|_{\Gamma_r \cap V} < 0 \Rightarrow w$ besitzt auf Γ_r eine Nullstelle N_r mit maximaler x -Komponente. Analog der Herleitung von ζ folgt damit die Existenz einer stetig differenzierbaren Kurve φ mit den Eigenschaften:

$$\varphi(0) = \gamma_2, \quad \varphi(\tau_1) = s(\tau_1), \quad \wedge_{\gamma_2 < t < \tau_1} \varphi(t) < \zeta(t), \quad w(\varphi(t), t) = 0, \quad \dot{\varphi}(t) \geq 0.$$

Wir haben noch den Vorzeichenwechsel von h zu zeigen:

Annahme: $h|[\gamma_1, \gamma_2] \geq 0$.

Sei $D' := D \cap \{t \leq \gamma_2\}$. $\Rightarrow w|_{D'} \leq 0$ und wegen $w_x(\zeta(t), t) > 0$ sogar $w|_{D'} < 0$. $\Rightarrow w(0, \gamma_2) = 0$ ist Maximum bezüglich $\bar{D}'$.
 $\Rightarrow$ (Hopfsches Lemma) $h(\gamma_2) = w_x(0, \gamma_2) < 0$. Widerspruch!

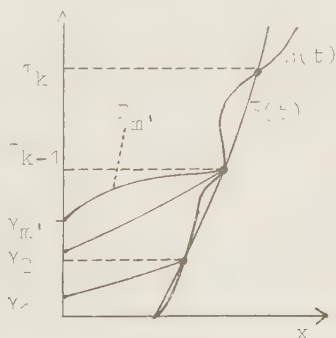
$h|[\gamma_1, \gamma_2] \leq 0$ ist wegen $w_x(\zeta(t), t) > 0$ und $w(\zeta(t), t) = 0$ ebenfalls unmöglich. $\Rightarrow h$ wechselt in $t_2 \in (\gamma_1, \gamma_2)$ sein Vorzeichen.

Damit ist der Satz, bzw. die erweiterte Behauptung (3.4.5,6) für $k=1$ vollständig bewiesen.

$k-1 \rightarrow k$:

Sei die Behauptung für $k-1$ richtig. Wir nehmen wieder o.E. an, daß $\Delta s^1(\tau_{k-1}, \tau_k) > 0$. Es liegt also die nebenstehend skizzierte Situation vor:

Sei $m' := \sum_{i=1}^{k-1} V(\tau_i)$. h hat in den



Punkten $0 < t_1 < \dots < t_m$, sein Vorzeichen gewechselt, und es ist $h[t_{m-1}, t_m] \geq 0$. Damit liegt die gleiche Vorzeichen-situation wie im Fall $k=1$ vor, nur daß jetzt die x-Achse durch die Kurve Γ_m , zu ersetzen ist. Der Beweisverlauf kann wörtlich übernommen werden, da die Anschlußbedingungen nach Induktions-voraussetzung erfüllt sind. Damit ist der Satz bewiesen. **

(3.4.8) Bemerkung:

- a) Die im Beweis verwendete Schlußweise zum Nachweis einer zusätzlichen Niveaulinie bei Vorliegen einer mehrfachen Nullstelle von Δs kann nicht beliebig oft wiederholt werden, da bereits die zweite Niveaulinie mit horizontaler Tangente in den Punkt $(s(\tau_1), \tau_1)$ einmündet, und daher das iterierte Gebiet $D_r^{(j)}$ im Punkt $(s(\tau_1), \tau_1)$ nicht mehr die innere Kugelbedingung erfüllt.
- b) Sind die Nullstellen nicht getrennt, d.h. gilt für zwei Argumente $\tau_1 < \tau_2$ $\Delta s[\tau_1, \tau_2] = 0$, so folgt:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{\tau_1 \leq t \leq \tau_2} w(s(t), t) = w_x(s(t), t) = 0. & \implies \bigwedge_{0 \leq x \leq s(t)} w(x, t) = 0. \\ \implies h[\tau_1, \tau_2] = 0. & \end{aligned}$$

**

Wir wollen nun den zu Satz (3.4.3) analogen Satz für das Paar $(z, \delta s)$ der F-Ableitung formulieren und beweisen.

(3.4.9) Satz: (Nullstellensatz für die F-Ableitung)

Sei $g \in A$ und $\delta s = S_\sigma h$ für $h \in B$. δs besitze die k getrennten Nullstellen $0 < \tau_1 < \dots < \tau_k$, und es sei m die Summe der Vielfachheiten. Dann gibt es mindestens $m+1$ Zahlen $0 = \gamma_0 < \dots < \gamma_m$ und m Stellen $0 < t_1 < \dots < t_m$ mit der Eigenschaft (3.4.4).

Beweis:

Der Beweis verläuft vollkommen analog zum Beweis von Satz (3.4.3). Man ersetze nur die Bezeichnungen Δs durch δs , w durch z und α durch s . **

Es läge nahe, mindestens den letzten Satz mit Hilfe der Theorie der "variationsverkleinernden Kerne" beweisen zu wollen (Hirschmann, Widder [44], Karlin [50]), da δs die lineare Volterra'sche Integralgleichung (2.7.3) löst, und Kerne von Faltungen ähnlich der Bauart, wie sie in (2.7.3) auftreten, gerade diese sogenannte "variation diminishing property" besitzen ([44, Kapitel 4]). Es gelang uns jedoch nicht, die in [44] angegebenen Resultate auf unser komplizierteres Problem zu übertragen.

Die beiden letzten Sätze besagen im wesentlichen, daß die Funktionen Δs und δs höchstens (aber u.U. genauso) so oft ihr Vorzeichen in $(0, T]$ wechseln, wie die Variation h . Damit haben aber sowohl Δs wie δs i.a. eine Nullstelle "zuviel" im Intervall $[0, T]$, da in jedem Fall $\Delta s(0) = \delta s(0) = 0$ gilt. Die Menge $S(A)$ erfüllt also die GHB und die LHB nur im halboffenen Intervall $(0, T]$, falls der Ansatzraum V die HB erfüllt. Um den Haarschen Bedingungen zu genügen, müssen wir daher unser Approximationsproblem (3.2.1) etwas abändern und können dann über einen Grenzprozess die Lösung des ursprünglichen Problems (3.2.1) charakterisieren.

Wir wollen bekannte Sätze aus der nichtlinearen Approximationstheorie anwenden und benötigen dazu eine offene Parametermenge A . Wir ändern daher die Definition der Menge A etwas ab und führen gleichzeitig einige neue Bezeichnungen ein.

(3.4.10) Definition:

Die Menge $A := \{a \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i \neq 0, \alpha_i \in [0, T]\}$ heißt

Menge der zulässigen Parameter (für $a \in A$ verwenden wir die Bezeichnungen $S(a)$ und $S(v(a))$ parallel, ohne Verwechslungen befürchten zu müssen).

Für jedes $\epsilon > 0$ definieren wir die Operatoren:

$$S'_\epsilon: C[0, T] \rightarrow C[\epsilon, T], \quad h \mapsto S'_\epsilon h := S(v(h))|_{[\epsilon, T]},$$

$$S'_{\epsilon, g}: C[0, T] \rightarrow C[\epsilon, T], \quad h \mapsto \delta s = S'_g h|_{[\epsilon, T]},$$

(wir verwenden auch hier die Bezeichnungen $S'_\epsilon(a)$ und $S'_{\epsilon, a}$).

Weiter definieren wir eine ϵ -Norm und einen ϵ -Minimalabstand:

$$\|g\|_{\epsilon, T} := \sup_{t \in [\epsilon, T]} |g(t)|, \quad \rho(\epsilon) := \inf \|S_{\epsilon}(a) - \tilde{s}\|_{\epsilon, T}.$$

Wir sprechen von ϵ -Approximationsproblem, falls $\tilde{s}$ nur auf $[\epsilon, T]$ approximiert wird. **

(3.4.11) Lemma:

Die Abbildung S_{ϵ} ist Lipschitz-stetig F -differenzierbar und besitzt als Ableitung im Punkt g die lineare Abbildung $S'_{\epsilon, g}$.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus den Sätzen (2.6.5) und (2.7.1) **

Da die Funktionen Δs und δs im Intervall $[\epsilon, T]$, $\epsilon > 0$, höchstens so viele Nullstellen besitzen wie die Variation h , erfüllt die Menge $S_{\epsilon}(A)$ die globale und die lokale HB, falls V die HB erfüllt. Dies ist die Aussage des nächsten Satzes.

(3.4.12) Satz:

Erfüllt V die HB, so gilt für alle $0 < \epsilon < 1$:

$$(3.4.13) \quad \bigwedge_{a \in A} d_{\epsilon}(a) := \dim(S'_{\epsilon, a}(\mathbb{R}^{11})) = n.$$

$$(3.4.14) \quad S_{\epsilon}(A) \text{ erfüllt die GHB.}$$

$$(3.4.15) \quad S_{\epsilon}(A) \text{ erfüllt die LHB.}$$

Beweis:

(3.4.13) drückt gerade die Regularität des $TRes$ von S_{ϵ} aus. Wie für Korollar (3.3.3) zeigen wir die Injektivität von $S'_{\epsilon, a}$. Sei $S'_{\epsilon, a} b = \delta s|_{[\epsilon, T]} = 0$. $\implies \bigwedge_{\epsilon \leq t \leq T} y(s(t), t) = y_x(s(t), t) = 0$. $\implies \sum_{i=1}^n b_i v_i|_{[\epsilon, T]} = 0$. $\implies (HB) \quad b = 0$. *

Zum Nachweis der GHB schließen wir mit Satz (3.4.3):

$S_\epsilon(a) - S_\epsilon(b)$ habe n Nullstellen in $[\epsilon, T]$. $\Rightarrow \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) v_i$
 hat in $[0, T]$ n Nullstellen. $\Rightarrow \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) v_i = 0$. $\Rightarrow$
 $a=b$. $\Rightarrow S_\epsilon(a) = S_\epsilon(b)$.

Für die LHB verwendet man analog Satz (3.4.9).

**

Wir bemerken, daß die Menge $S(A)$ aus dem weiter oben angegebenen Grund weder die GHB noch die LHB erfüllt. Mit Satz (3.4.12) sind wir jedoch in der Lage, beste ϵ -Approximationen zu charakterisieren.

3.5 Charakterisierung der besten L_∞ -Approximation

(3.5.1) Lemma:

V erfülle die HB, und es sei $\tilde{s} \in C[0, T]$, $\tilde{s}(0)=b$ und $\epsilon \in (0, T)$. Dann gilt:

a) Eine Funktion $s_\epsilon^* = S_\epsilon(a_\epsilon^*)$ ist genau dann Minimallösung des ϵ -Approximationsproblems bezüglich der Parametermenge A , wenn es eine Alternante der Länge $n+1$ gibt, d.h., wenn Punkte $\epsilon \leq t_1 < \dots < t_{n+1} \leq T$ existieren, sodaß die Fehlerfunktion $e_\epsilon := \tilde{s} - s_\epsilon^*$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$(3.5.2) \quad \bigwedge_{1 \leq i \leq n+1} |e_\epsilon(t_i)| = \|e_\epsilon\|_{\epsilon, T} \quad .$$

$$(3.5.3) \quad \bigwedge_{1 \leq i \leq n} e_\epsilon(t_i) + e_\epsilon(t_{i+1}) = 0 \quad .$$

b) Es existiert höchstens eine Minimallösung s_ϵ^* für $\tilde{s}$ auf dem Intervall $[\epsilon, T]$.

Beweis:

Mit Satz (3.4.12) sind alle Voraussetzungen zu den Sätzen

86 und 87 aus Meinardus [55, S.138-140] erfüllt. Aus ihnen folgt die Behauptung.

**

Wir betrachten nun das Verhalten der besten Approximationen s_ϵ^* für $\epsilon \rightarrow 0$. Dabei gelingt es uns, durch eine gleichmäßige a-priori-Abschätzung der Ableitung $S(a)$ ein $\delta > 0$ anzugeben, ab dem die Abbildung $\epsilon \rightarrow s_\epsilon^*$ konstant wird, sodaß ab diesem δ alle besten ϵ -Approximationen s_ϵ^* mit der besten Approximation s^* auf $[0, T]$ übereinstimmen.

(3.5.4) Satz: (Charakterisierung der besten Approximation)

V erfülle die HB, und es sei $\tilde{s} \in C[0, T]$, $\tilde{s}(0) = b$. Dann gilt:

a) $s^* = S(a^*)$ ist genau dann Minimallösung für $\tilde{s}$ auf dem Intervall $[0, T]$, wenn es eine Alternante der Länge $n+1$ gibt, d.h., wenn Punkte $0 < t_1 < \dots < t_{n+1} \leq T$ existieren, sodaß für die Fehlerfunktion $e = \tilde{s} - s^*$ gilt:

$$(3.5.5) \quad \bigwedge_{1 \leq i \leq n+1} |e(t_i)| = \|e\|_T, \quad ,$$

$$(3.5.6) \quad \bigwedge_{1 \leq i \leq n} e(t_i) + e(t_{i+1}) = 0 \quad .$$

b) Es existiert höchstens eine Minimallösung $s^* = S(a^*)$.

Beweis:

Wie im Beweis des Existenzsatzes (3.2.2) gezeigt wurde, folgt aus der Eigenschaft $b \leq S(a) \leq M$ (Bedingung (3.2.4)) die Existenz einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, sodaß $a \in K$ ist. Dies gilt wegen der Monotonie der betrachteten Ränder $s \in S(A)$ selbstverständlich auch für $S_\epsilon(a)$. Es genügt also, die Approximationsprobleme auf einer Menge $A \cap K$ zu betrachten mit einer geeigneten kompakten Menge K . Nach Abschätzung (2.1.11) gilt: $\|S(a)\|_T \leq \max(\|f'\|_b, \|\sum a_i v_i\|_T)$. Aufgrund der Beschränktheit von $A \cap K$ und der Stetigkeit von S erhalten wir:

$$(3.5.7) \quad \bigvee_{N > 0} \sup\{\|S(a)\|_T \mid a \in A \cap K\} \leq N \quad .$$

Falls der Minimalabstand $\rho=0$ ist, ist Nichts zu zeigen. Seien also $\rho > 0$ und s^* und $\bar{s}^*$ beste Approximationen an $\tilde{s}$ auf $[0, T]$. Mit $w(\tilde{s}; \epsilon)$ bezeichnen wir den Stetigkeitsmodul von $\tilde{s}$. Wir wählen ein $\delta > 0$ so klein, daß $w(\tilde{s}; \delta) < \frac{1}{2}\rho$ und $\delta < \frac{\rho}{2N}$ ist. Dann gilt für alle $0 < \epsilon \leq \delta$ und für alle $s \in S(A \cap K)$ wegen (3.5.7):

$$\begin{aligned} \|s - \tilde{s}\|_{\epsilon} &\leq b + \epsilon \|\dot{s}\|_{\epsilon} = b + w(\tilde{s}; \epsilon) \leq N\epsilon + w(\tilde{s}; \epsilon) \leq \\ &\leq N\delta + w(\tilde{s}; \delta) \leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt insbesondere für s^* und $\bar{s}^*$. Damit sind s^* und $\bar{s}^*$ aber bereits Minimallösungen auf den Intervallen $[\epsilon, T]$ für alle $0 < \epsilon \leq \delta$, da die Fehlnorm im Intervall $[0, \delta]$ von keinem Rand $s \in S(A \cap K)$ überschritten wird. Nach Lemma (3.5.1.b) stimmen dann für alle $0 < \epsilon \leq \delta$ s^* und $\bar{s}^*$ auf den Intervallen $[\epsilon, T]$ überein, woraus $s^* = \bar{s}^*$ und damit die Eindeutigkeit der besten Approximation s^* folgt (Behauptung b)). *

Für alle $0 < \epsilon \leq \delta$ stimmen die Minimallösungen s_{ϵ}^* mit s^* überein. Nach Lemma (3.5.1.a) existiert deshalb eine Alternante $0 < \delta \leq t_1 < \dots < t_{n+1} \leq T$ mit den geforderten Eigenschaften.

**

Wir geben noch eine weitere, im nächsten Abschnitt benötigte, differentielle Charakterisierung der besten Approximation an.

(3.5.8) Korollar:

Unter den Voraussetzungen von Satz (3.5.4) ist $s^* = S(a^*)$ genau dann beste Approximation an $\tilde{s}$, wenn die Nullfunktion beste Approximation aus dem Tangentialraum $S'_{a^*}(\mathbb{R}^n)$ an $\tilde{s} - s^*$ ist.

Beweis:

s^* ist beste Approximation genau dann, wenn eine Alternante $0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ mit den Eigenschaften (3.5.5,6) existiert.

Da $S'_{\epsilon, a^*}(\mathbb{R}^n)$ die HB erfüllt, ist dies genau dann der Fall (Alternantensatz der linearen Approximationstheorie), wenn die Nullfunktion für alle $\epsilon > 0$ beste Approximation an $e = \tilde{s} - s^*$ auf $[\epsilon, T]$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

**

Auch im nicht-Haarschen Fall folgt aus der Optimalität von s^* bezüglich $\tilde{s}$ die Optimalität der Nullfunktion bezüglich e und des Tangentialraumes, allerdings nicht die Umkehrung (Wulbert [73, Lemma 15]), da s^* Sattelpunkt sein kann, ohne optimal zu sein.

3.6 Starke Eindeutigkeit

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit dem für die Stabilität und damit für die Konvergenz numerischer Approximationsverfahren wichtigen Begriff der starken Eindeutigkeit der besten Approximation (Cromme [27]).

(3.6.1) Definition:

Sei $W := S(A)$ die Menge der approximierenden Ränder. Eine Funktion $s^* \in W$ heißt stark eindeutig beste Approximation (SEBA) von $\tilde{s}$, falls es eine Konstante $r > 0$ gibt, sodaß

$$(3.6.2) \quad \bigwedge_{s \in W} \|s - \tilde{s}\|_T - \|s^* - \tilde{s}\|_T \geq r \|s - s^*\|_T$$

ist. s^* heißt dann lokal stark eindeutig beste Approximation (LSEBA) von $\tilde{s}$, falls (3.6.2) nur in einer geeigneten Umgebung UW von s^* erfüllt ist.

**

Im linearen Fall ist die HB bekanntlich hinreichend für die starke Eindeutigkeit der besten Approximation (Cheney [21, S.82]). Aus ihr folgt z.B. die Lipschitz-Stetigkeit des

Tschebyscheff-Operators (der jeder Funktion $\tilde{s}$ ihre beste Approximation zuordnet) in jedem Punkt $\tilde{s}$ (Satz von Freud [21, S.82]). Sie ist außerdem eine wichtige Voraussetzung für die quadratisch Konvergenz eines Newton-ähnlichen Approximationsverfahrens (Cromme [25,26]), das wir im nächsten Kapitel angeben werden.

Die starke Eindeutigkeit spielt eine bedeutende Rolle bei der Charakterisierung bester Approximationen auf Tangentialkegeln (Wulbert [73,74]) und bei der Untersuchung der Konvergenzgeschwindigkeit der besten Approximationen auf diskreten Teilmengen gegen die kontinuierliche beste Approximation in Abhängigkeit von der Gitterfeinheit (Chalmers [18]). Im Falle linearer, diskreter T-Approximation ist bei Vorliegen starker Eindeutigkeit der Tschebyscheff-Operator sogar gleichmäßig Lipschitz-stetig (Gline [24], Bartelt [5]).

Zum Nachweis der starken Eindeutigkeit in unserem Fall zitieren wir zunächst ein Ergebnis von Wulbert [73].

(3.6.3) Lemma:

$s^* = S(a^*)$ ist genau dann LSEBA von $\tilde{s}$, falls die Nullfunktion SEBA an $\tilde{s}-s^*$ bezüglich des Tangentialraumes $S_a'(\mathbb{R}^n)$ ist.

Beweis: Wulbert [73, Lemma 9, S.355] .

**

Nach Lemma (3.6.3) genügt es, die starke Eindeutigkeit auf dem TR nachzuprüfen, um die lokale starke Eindeutigkeit von s^* sicherzustellen.

(3.6.4) Korollar:

V erfülle die HB, und es sei $\tilde{s} \in C[0,T]$, $\tilde{s}(0)=b$. Dann ist $s^* \in W$ LSEBA an $\tilde{s}$.

Beweis:

Sei $s^* = S(a^*)$ beste Approximation an $\tilde{s}$. Nach Satz (3.5.4) ist s^* eindeutig bestimmt und nach Korollar (3.5.8) die Null-

funktion die eindeutig bestimmte beste Approximation an $\tilde{s}-s^*$ aus dem TR $S_a^*(\mathbb{R}^n)$. Wegen Lemma (3.6.3) genügt es also nachzuweisen, daß $0 \in S_a^*(\mathbb{R}^n)$ sogar SEBA an $\tilde{s}-s^*$ ist. Da $S_a^*(\mathbb{R}^n)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, T]$ die HB nicht notwendig erfüllt, können wir den diesbezüglichen Satz aus [21, S.80] nicht direkt zitieren (ein Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ wie im Beweis von Satz (3.5.4) führt hier nicht zum Ziel, da die Konstante r in (3.6.2) von ϵ abhängen und ebenfalls verschwinden könnte!). Im Beweis des Cheney-Satzes [21, S.80] wird die HB jedoch nur auf den bereits bekannten Alternantenpunkten $0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ ausgenutzt, auf denen sie nach Satz (3.4.3) erfüllt ist. Daraus folgt die Behauptung. **

Wie man sieht, liefert die Anwendung bekannter Sätze sofort die lokale starke Eindeutigkeit, die jedoch die für die Konvergenz eines iterativen Verfahrens zulässige Startumgebung von a^* (d.h. die Menge derjenigen Parameter $a^{(0)}$, für die das Verfahren, gestartet in $a^{(0)}$, gegen a^* konvergiert) u.U. stark einschränkt. Wir wollen daher die globale starke Eindeutigkeit von s^* im folgenden Satz direkt beweisen.

(3.6.5) Satz: (Globale starke Eindeutigkeit)

V erfülle die HB, und es sei $\tilde{s} \in C[0, T]$, $\tilde{s}(0) = b$. Dann ist s^* sogar SEBA an $\tilde{s}$.

Beweis:

Sei s^* die nach Satz (3.5.4) eindeutig bestimmte beste Approximation an $\tilde{s}$ aus $W = S(A)$. Dann gibt es eine Alternante $0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ mit $(\tilde{s} - s^*)(t_i) = \sigma_i \|\tilde{s} - s^*\|_T$, wobei $\sigma_i = \pm (-1)^i$ ist. Sei E die Menge

$$E := \{s \in W \mid \|s - s^*\|_T = 1\}.$$

Für alle $s \in E$ gilt $b \leq s \leq \|s^*\|_T + 1$. Aus dem Existenzsatzes (3.2.2) folgt: $S^{-1}(E) := \{a \in A \mid S(a) \in E\}$ ist eine

beschränkte Teilmenge von $A \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren auf E das stetige Funktional

$$\varphi(s) := \max_{1 \leq i \leq n+1} \sigma_i(s^* - s)(t_i) \quad .$$

Sei $r := \inf_{s \in E} \varphi(s)$. Wir zeigen zunächst: $r > 0$.

Annahme: $r \leq 0$.

Dann gibt es eine Folge $(a_k) \subset S^{-1}(E)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(S(a_k)) = r \leq 0$.

Wegen der Beschränktheit von $S^{-1}(E)$ ist $\overline{S^{-1}(E)}$ kompakt. $\Rightarrow$

Es gibt eine Teilfolge $(a_{k_j}) \subset S^{-1}(E)$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{k_j} = \bar{a} \in \overline{S^{-1}(E)}$.

$\Rightarrow S$ ist in $\bar{a}$ definiert, und infolge der Stetigkeit von S und

φ gilt: $\varphi(\bar{s}) = \varphi(S(\bar{a})) = r \leq 0$. $\Rightarrow \bigwedge_{1 \leq i \leq n+1} \sigma_i(s^* - \bar{s})(t_i) \leq$

$\leq r \leq 0$. Wegen $\sigma_i = \frac{+}{-} (-1)^i$ hat deshalb $s^* - \bar{s}$ mindestens n

Nullstellen in $[t_1, T]$ (doppelte Nullstellen zweifach gezählt).

$\Rightarrow 0 = \|s^* - \bar{s}\|_T = 1$. Widerspruch!

Die Annahme war also falsch und es gilt:

$$(3.6.6) \quad r = \inf_{s \in E} \varphi(s) = \inf_{s \in E} \max_{1 \leq i \leq n+1} \sigma_i(s^* - s)(t_i) > 0 \quad .$$

Sei nun $s \in W$ beliebig. $\Rightarrow \frac{s^* - s}{\|s^* - s\|_T} \in E$. $\Rightarrow$ Es gibt ein

$$j, 1 \leq j \leq n+1, \text{ soda\ss } \frac{\sigma_j(s^* - s)(t_j)}{\|s^* - s\|_T} = \frac{1}{\|s^* - s\|_T} \times$$

$$\times \max_{1 \leq i \leq n+1} \sigma_i(s^* - s)(t_i) \geq r \quad . \quad \Rightarrow \quad \sigma_j(s^* - s)(t_j) \geq r \|s^* - s\|_T.$$

$$\Rightarrow \|\tilde{s} - s\|_T \geq \sigma_j(\tilde{s} - s)(t_j) = \sigma_j(\tilde{s} - s^*)(t_j) + \sigma_j(s^* - s)(t_j) \geq$$

$$\geq \|\tilde{s} - s^*\|_T + r \|s^* - s\|_T \quad . \quad \text{Das war zu zeigen.} \quad **$$

3.7 Fehlereinschließung

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels geben wir noch eine Einschließung des Minimalabstandes ρ an, die ein praktisches Abbruchkriterium für iterative, nichtlineare Approximationsverfahren liefert. Die Abschätzung stellt eine Verallgemeinerung des aus der linearen Approximationstheorie bekannten Satzes von De la Vallée-Poussin (Meinardus [55, S.80]) dar.

(3.7.1) Satz: (Fehlereinschließung)

V erfülle die HB und für ein $s \in S(A)$ gebe es $n+1$ Punkte $0 < t_1 < \dots < t_{n+1} \leq T$ mit den Eigenschaften:

$$(3.7.2) \quad \bigwedge_{1 \leq i \leq n+1} \quad \tilde{s}(t_i) - s(t_i) \neq 0 \quad ,$$

$$(3.7.3) \quad \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \quad \text{sign}(\tilde{s}(t_i) - s(t_i)) = -\text{sign}(\tilde{s}(t_{i+1}) - s(t_{i+1})) \quad .$$

Dann gilt:

$$(3.7.4) \quad \min_{1 \leq i \leq n+1} |\tilde{s}(t_i) - s(t_i)| \leq \rho \leq \|\tilde{s} - s\|_T \quad .$$

Beweis:

Die rechte Ungleichung ist trivial. Da V die HB erfüllt, genügt für alle $\epsilon > 0$ die Menge $S_\epsilon(A)$ der GHB (Satz (3.4.12)). Wir können damit Satz 88 aus Meinardus [55] anwenden und erhalten für $0 < \epsilon < t_1$:

$$\min_{1 \leq i \leq n+1} |\tilde{s}(t_i) - s(t_i)| \leq \rho(\epsilon) \quad .$$

Mit $\rho(\epsilon) \leq \rho$ folgt die Behauptung.

IV. Numerische Approximation

Wir benutzen in diesem Kapitel die Ergebnisse des 2. und 3. Kapitels zur numerischen Konstruktion bester Approximationen. Wir bedienen uns dabei eines Newton-ähnlichen Algorithmus, dessen quadratische Konvergenz wir im 2. Abschnitt mit Hilfe eines erst in jüngerer Zeit von Cromme [25] veröffentlichten Satzes beweisen.

In den Abschnitten 3-5 beschreiben wir die bei der numerischen Durchführung zu lösenden Teilaufgaben und diskutieren den dazu erforderlichen Aufwand. In Abschnitt 6 demonstrieren wir die Effizienz des Verfahrens anhand einiger signifikanter Beispiele.

4.1 Das Osborne-Watson-Verfahren

Wir behandeln das nichtlineare T-Approximationsproblem (3.2.1) mit einem Newton-ähnlichen Verfahren, bei dem in jedem Iterationsschritt ein lineares T-Approximationsproblem gelöst werden muß. Das Verfahren verallgemeinert das Gauß-Newton-Verfahren zur Minimierung einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (Ortega, Reinboldt [58]) auf die Minimierung eines stetigen nichtlinearen Funktionals auf $V \subset C[0, T]$, $\dim(V) = n$, in unserem Fall der T-Norm der Abweichungsfunktion.

Der Algorithmus wurde von Osborne und Watson [60, 59] entwickelt, seine quadratische Konvergenz später von Cromme [25] unter wesentlicher Ausnutzung der starken Eindeutigkeit der besten Approximation bewiesen. Hoffmann und Klostermair [47] benutzten eine Variante dieses Verfahrens (keine explizite

Parametrisierung der nichtlinearen Familie, sondern Beschreibung durch Nebenbedingungen) zur Approximation von Funktionen durch Lösungen von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen und erzielten sehr gute Ergebnisse.

Wir geben zunächst den Algorithmus in der von uns benötigten Form an:

(4.1.1) Verfahren:

(o) Wähle ein $a^0 \in A$ ("hinreichend nah" bei a^*) und Abbruchschranken $\epsilon, \epsilon' > 0$. Setze $i := 0$.

(i) Berechne die "Newtonkorrektur" $\Delta a^i \in \mathbb{R}^n$, sodaß

$$\|\tilde{S}(a^i) - S'_{a^i} \Delta a^i\|_T = \inf_{b \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{S}(a^i) - S'_{a^i} b\|_T .$$

(ii) Lineare Suche: Berechne $\lambda^i \in [0, 1]$, sodaß

$$\rho^i := \|\tilde{S}(a^i + \lambda^i \Delta a^i)\|_T = \min_{\lambda \in [0, 1]} \|\tilde{S}(a^i + \lambda^i \Delta a^i)\|_T .$$

(iii) $a^{i+1} := a^i + \lambda^i \Delta a^i$.

(iv) Abbruchkriterium:

Falls $\|a^{i+1} - a^i\|_\infty \leq \epsilon \|a^{i+1}\|_\infty$ oder $|\rho^i - \rho| \leq \epsilon' \rho^i$,
gehe zu (V).

Sonst: Setze $i := i+1$, gehe zu (i) .

(v) Ende.

Wir diskutieren den Aufwand, der bei der Durchführung der einzelnen Schritte entsteht.

- (o) Die Wahl einer geeigneten Anfangsnäherung macht, wie umfangreiche numerische Experimente zeigen, kaum Schwierigkeiten, dies wohl aufgrund der globalen starken Eindeutigkeit der besten Approximation. Treten trotzdem Probleme auf, so führt man das Verfahren zunächst für eine oder mehrere niedrigere Dimensionen des Parameterraumes durch und verwendet die dort berechnete beste Approximation als Startparameter für die höhere Dimension ("boot strapping"). In unseren Testbeispielen führte diese Strategie immer zum Erfolg. Sie empfiehlt sich u.U. sogar grundsätzlich, da man sich dadurch im höherdimensionalen Fall fast immer schon im Bereich der quadratischen Konvergenz befindet, was den Rechenaufwand (Anzahl der Iterationen) erheblich vermindert.

Die Wahl der Größen ϵ und ϵ' ist nicht kritisch und hängt von der zu approximierenden Funktion $\tilde{S}$ ab. Im allgemeinen wird man sich infolge des Approximationsfehlereinschlussungssatzes (3.7.1) bereits mit suboptimalen Lösungen begnügen (d.h. ϵ und ϵ' groß gegen die Maschinengenauigkeit).

- (i) In diesem Schritt hat man zunächst $S(a^i)$ zu berechnen, d.h. ein FRWP zu lösen, und eine Basis des Tangentialraumes $S'_i(\mathbb{R}^n)$ zu bestimmen. Letzteres wird i.a. durch die Abbildung einer geeigneten Basis des Parameterraumes V erfolgen; man hat dazu das System (2.3.20,21) n -mal zu integrieren.

Zur Behandlung des linearen T-Approximationsproblems wird man ein leistungsfähiges Verfahren, wie den Remez-Algorithmus oder eine Variante des Simplexverfahrens heranziehen. Wie die weiter unten angegebenen numerischen Beispiele zeigen, beansprucht die Lösung des linearen Approximationsproblems, zumindest für mittlere und niedrige Dimensionen ($n \leq 8$), weniger Rechenzeit, als die Erstellung des Tangentialraumes.

(ii) Dieser Schritt sollte nur während der ersten Iterationen durchgeführt werden, da für jede Funktionsauswertung ein FRWP gelöst und die T-Norm der Fehlerfunktion berechnet werden muß. Da die zu minimierende Funktion $\rho(\lambda)$ i.a. nicht differenzierbar ist, ist man auf ein primitives Suchverfahren, wie z.B. die Fibonacci-Methode (Ortega, Reinboldt [58]) angewiesen. Es genügt allerdings, λ^i mit einer relativen Genauigkeit von 10 Prozent zu bestimmen.

In allen gerechneten Beispielen war entweder gar keine lineare Suche nötig, oder sie konnte spätestens nach der 2. Iteration übersprungen werden (wenn λ^i zum ersten Mal aus $[0.9, 1]$ gewählt wurde).

(iv) Das zweite Abbruchkriterium eignet sich gut zur Bestimmung suboptimaler Lösungen einer vorgegebenen Approximationsgüte. Da der Minimalabstand ρ mit dem Einschließungssatz abgeschätzt werden kann, bereitet die Auswertung des Kriteriums keine Schwierigkeiten.

Zur Durchführung des Verfahrens (4.1.1) auf einer Rechenanlage müssen die Randwert- und Approximationsprobleme diskretisiert werden. Wir werden darauf im 3. Abschnitt eingehen. Zunächst wollen wir uns mit der Konvergenz des Verfahrens beschäftigen.

4.2 Konvergenz des Verfahrens

(4.2.1) Satz: (Konvergenzsatz)

Sei $\tilde{s} \in C[0, T]$, $\tilde{s}(0) = b$, gegeben und $s^* = S(a^*)$ die nach Satz (3.5.4) eindeutig bestimmte beste Approximation an $\tilde{s}$ bezüglich der Menge $S(A)$. Dann ist das Verfahren (4.1.1) lokal mindestens quadratisch konvergent, d.h. es gibt Konstanten $\delta > 0$ und $C > 0$, sodaß

$$(4.2.2) \quad \begin{array}{l} a^0 \in A \\ \|a^* - a^0\| \leq \delta \end{array} \quad \|a^{i+1} - a^*\| \leq C \|a^i - a^*\|^2,$$

wobei $\|\cdot\|$ irgend eine $\mathbb{R}^n$ -Norm ist.

Beweis:

Wir verwenden ein Ergebnis von Cromme [25]. Um Satz 1 aus [25] anwenden zu können, sind die dortigen Voraussetzungen nachzuprüfen. Sie lauten:

- (1) In einer geeigneten Umgebung U von a^* lasse sich S auf $A' := U \cap \bar{A}$ erweitern.
- (2) In jedem Punkt $a \in A'$ sei S F -differenzierbar.
- (3) S' sei in a^* Lipschitz-stetig.
- (4) $s^* = S(a^*)$ sei lokal stark eindeutig beste Approximation.
- (5) Die F -Ableitung S' sei im Punkt a^* regulär, d.h.
 $\lim_{a \rightarrow a^*} \frac{S'(a)}{\|a - a^*\|} = 0$.

Punkt (1) ist trivialerweise erfüllt, da S in jedem Punkt g aus $C[0, T]$ mit $g \leq 0$ erklärt ist. (2) ist mit Satz (2.6.5) erledigt, (3) ist die Aussage von Satz (2.7.1), (4) und (5) ergeben sich schließlich aus Satz (3.6.5) bzw. aus Korollar (3.3.3).

Damit sind alle Voraussetzungen des angegebenen Satzes 1* aus [25] nachgewiesen, woraus die Behauptung folgt. **

Aus dem Beweis von Satz 1 in [25], bzw. der nachfolgenden Bemerkung S.451, geht hervor, daß es genügt, die Tangentialraumprobleme im Schritt (i) des Verfahrens (4.1.1) nicht exakt, sondern nur "gut" zu lösen, d.h., daß das numerisch (innerhalb gewisser Grenzen) gestörte Verfahren lokal immer noch quadratisch gegen den optimalen Parameter a^* konvergiert.

Diese Eigenschaft hat entscheidende Bedeutung für die numerische Stabilität des Verfahrens, da die Funktionen $S(a^i)$ und S'_{a^i} auf der Rechenanlage durch Wertevektoren aus geeigneten Diskretisierungsverfahren dargestellt, und die linearen Approximationsprobleme normalerweise auf einem diskreten Punktegitter gelöst werden. Die Güte der numerischen Approximation läßt sich sehr einfach mit dem Einschließungssatz für den Minimalabstand ρ feststellen (im linearen Fall: Satz von De la Vallee-Poussin (Meinardus [55, S.80]), im nichtlinearen Fall: Satz (3.7.1)).

Der Begriff der "guten" Lösung des linearen Approximationsproblems läßt sich folgendermaßen präzisieren:

(4.2.3) Lemma:

Anstatt Schritt (i) im Verfahren (4.1.1) berechne man einen "guten" Parameter $\Delta a^i \in \mathbb{R}^n$ so, daß

$$(4.2.4) \quad \|\tilde{s} - S(a^i) - S'_{a^i}(\Delta a^i)\|_T \leq \|\tilde{s} - S(a^i) - S'_{a^i}(a^* - a^i)\|_T$$

ist. Dann bleibt das Verfahren lokal quadratisch konvergent.

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus der Implikation (3.4) in [25, S.450].

* *

Das Kriterium (4.2.4) ist a-priori, also während der Iteration, nicht verfügbar, da der optimale Parameter a^* nicht bekannt, und damit die rechte Seite nicht auswertbar ist. Es läßt sich

nur die qualitative Aussage ablesen, daß mit zunehmender Güte der Approximation auch die linearen Approximationsprobleme mit wachsender Genauigkeit gelöst werden müssen, da die rechte Seite von (4.2.4) quadratisch gegen den Minimalabstand ρ konvergiert.

4.3 Diskretisierungsverfahren

a) Lösung der freien Randwertprobleme

Prinzipiell eignet sich zur numerischen Lösung der FRWPe jedes konvergente Diskretisierungsverfahren - eine Übersicht darüber findet man z.B. bei Ockendon, Hodkins [57] oder in [45]. Das bei gleicher Genauigkeit mit Abstand schnellste derzeit bekannte Verfahren zur Lösung FRWPe in einer Ortsvariablen stammt von Bonnerot und Jamet [6] und gehört mit dem von Wellford und Ayer [72] veröffentlichten Algorithmus zu den beiden (u.W.) einzigen Verfahren, die bezüglich beider Diskretisierungsparameter Δx und Δt von 2. Ordnung konsistent sind. Ein Konvergenzbeweis für dieses Verfahren steht allerdings noch aus.

Bonnerot und Jamet diskretisieren die t-Variable äquidistant

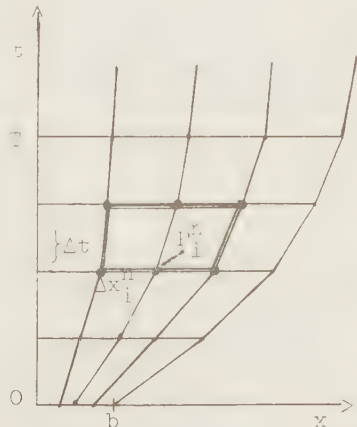
$$\Delta t = T/N, \quad N \in \mathbb{N},$$

$$t_i = i \cdot \Delta t, \quad i=0, \dots, N,$$

und unterteilen jede Zeitschicht $[0, s(t_n)]$ in J Teilintervalle:

$$\begin{aligned} \Delta x_i^n &= x_{i+1}^n - x_i^n, \\ (4.3.2) \quad P_i^n &= (x_i^n, t_n), \quad i=0, \dots, J-1. \end{aligned}$$

Durch einen Ansatz mit linearen finiten Elementen auf jedem Trapez $\{P_i^n, P_{i+1}^n, P_{i+1}^{n+1}, P_i^{n+1}\}$ erhält man einen Differenzenoperator L_h ,



der für den Spezialfall $\Delta x_i^n = \Delta x^n = \text{const}(n)$ und $s(t) = \text{const.}$ in das Crank-Nicholson-Schema übergeht. Für den Fall $\Delta x_i^n = \text{const}(n)$ ist L_n mit dem Wärmeleitungsoperator L konsistent von der Ordnung $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$, wobei $\Delta x := \max \Delta x^n$ ist. Die Gewichte in den 6 Punkten $p_{i-1}^n, p_i^n, p_{i+1}^n, p_{i-1}^{n+1}, p_i^{n+1}, p_{i+1}^{n+1}$ lassen sich explizit berechnen. Man hat damit auf jeder Zeitschicht ein diagonaldominantes Tridiagonalsystem zu lösen.

Da in [6] am linken Rand Dirichlet-Daten zugrunde gelegt werden, änderten wir das Differenzenschema in $\{x=0\}$ ab und approximierten die Randbedingung $u_x(0,t)=g(t)$ wie in [2, Kapitel 6] ebenfalls von der Ordnung $O((\Delta x)^2)$, ohne die Tridiagonalgestalt des linearen Gleichungssystems zu zerstören.

Zur Approximation der freien Randbedingung (2.1.5) wird in [6] ein implizites Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung verwendet:

$$(4.3.3) \quad \begin{aligned} s^{n+1} &= s^n - \frac{\Delta t}{2} (Du^n + Du^{n+1}), \quad \text{wobei} \\ Du^n &= \frac{1}{\Delta x^n} \left(\frac{3}{2} u_J^n - 2 u_{J-1}^n + \frac{1}{2} u_{J-2}^n \right). \end{aligned}$$

Um die implizite Gleichung (4.3.3) zu lösen, muß auf jeder Zeitschicht iteriert werden. Um Rechenzeit zu sparen, ersetzen wir (4.3.3) durch das explizite Zweischritt-Adams-Bashforth-Verfahren

$$(4.3.4) \quad s^{n+1} = s^n - \frac{\Delta t}{2} (3 Du^n - Du^{n-1}), \quad s^0 = s, \quad Du^0 = 0,$$

und verschafften uns den 2. benötigten Anfangswert s^1 durch einen Schritt des Polygonzugverfahrens:

$$(4.3.5) \quad s^1 = b - Df.$$

Das mit den Formeln (4.3.4,5) anstatt (4.3.3) gerechnete Verfahren benötigt nur ein Drittel der Rechenzeit des Original-

Bonnerot-Jamet-Verfahrens, ohne daß die hohe Konvergenzordnung zerstört, oder das Konvergenzverhalten negativ beeinflußt würde. Nachstehend geben wir eine Tabelle an, an der die quadratische Konvergenz und die hohe Genauigkeit des Verfahrens abgelesen werden kann.

Beispiel: Wahre Lösung: $u(x,t)=\exp\{2(1+2t-x)\}-1$, $s(t)=1+2t$.

J	N	s^N	$s(2)$	$e^N = \frac{s(2) - s^N}{s(2)}$	$ e^N / e^{2N} $	Rechenzeit
10	20	4.5654	5.0	0.086914	61.60	0.002 sec.
20	40	5.0071	5.0	-0.001411	1.19	0.007 sec.
40	80	4.9941	5.0	0.001183	4.51	0.029 sec.
80	160	4.9987	5.0	0.000262	4.29	0.117 sec.
160	320	4.9997	5.0	0.000061	---	0.471 sec.

b) Berechnung des Tangentialraumes

Zur Berechnung einer Basis des Tangentialraumes verwendeten wir die Differentialgleichung für δs

$$(4.3.6) \quad \delta \dot{s}(t) = -\dot{s}^2(t) \delta s(t) - z_x(s(t), t), \quad \delta s(0) = 0.$$

und diskretisierten diese ebenfalls durch das Zweischritt-Adams-Bashforth-Verfahren:

$$(4.3.7) \quad \begin{aligned} \delta s^{n+1} &= \delta s^n - \frac{\Delta t}{2} (3Ez^n - Ez^{n-1}), \quad \delta s^0 = \delta s^1 = 0, \\ Ez^n &= \left[\frac{s^{n+1} - s^{n-1}}{2\Delta t} \right]^2 \delta s^n + Dz^n. \end{aligned}$$

$\delta s^1 = 0$ ist wegen $\delta \dot{s}(0) = 0$ eine Approximation des 2. Startwertes von der Ordnung $O((\Delta t)^2)$. Die WLK wird wieder durch das Bonnerot-Jamet-Schema ersetzt. Die gerechneten Testbei-

spiele lassen auch hier auf quadratische Konvergenz in Δt und Δx schließen.

Mit diesem Verfahren wird nun eine Basis des TRs berechnet, indem für jede Basisfunktion $v_k \in V$ das zugehörige Bild $\varphi_k = S'_{ai}(v_k)$ bestimmt wird. Dazu hat man das System (2.3.20,21) $\dim(V)$ -mal numerisch zu integrieren.

c) Lösung der linearen Approximationsprobleme

Da infolge der Diskretisierung der Randwertprobleme die Funktionen $S(a^i)$ und $S'_{ai}(b)$ nur auf dem durch (4.3.1) definierten Gitter G zur Verfügung stehen, liegt es nahe, die linearen Approximationsprobleme durch eine diskrete Variante des Remez-Verfahrens oder durch das Simplex-Verfahren zu lösen.

Wir wählten die zweite Alternative, da ein leistungsfähiger Algorithmus von Barrodale und Young [4] für unsere Zwecke geeignet schien, insbesondere deshalb, weil dieses Verfahren durch eine geschickte Anordnung des Simplextableaus mit minimalem Speicheraufwand auskommt und sich relativ einfach auf zusätzliche lineare Restriktionen erweitern läßt. Wir führen im Folgenden bei der Beschreibung der Diskretisierung den Iterationsindex der Osborne-Watson-Iteration (4.1.1) nicht mit.

Sei $\varphi_k = S'_{ai}(e_k)$ die k -te Basisfunktion des TRes in $a^i \in A$ (e_k ist der k -te Einheitsvektor aus $\mathbb{R}^n$) und $\bar{\varphi}_k$ die mit dem Verfahren aus (4.3.b) berechnete diskrete Näherung für φ_k ($\bar{\varphi}_k$ ist nur auf dem Gitter G definiert). Analog dazu sei $\bar{\varphi}$ die diskrete Näherung für $\varphi := \tilde{S}(a^i)$. Dann lautet das diskrete Analogon zu der in Schritt (i) des Verfahrens (4.1.1) zu lösenden Approximationsaufgabe:

Suche ein $b^* \in \mathbb{R}^n$ mit

$$(4.3.8) \quad \left\| \bar{\varphi} - \sum_{k=1}^n b_k^* \bar{\varphi}_k \right\|_{\infty} = \inf_{b \in \mathbb{R}^n} \left\| \bar{\varphi} - \sum_{k=1}^n b_k \bar{\varphi}_k \right\|_{\infty},$$

wobei $\|\cdot\|_{\infty}$ die diskrete T-Norm auf dem Gitter G ist.

Im Algorithmus von Barrodale und Young [4] müssen i.w. nur die Werte $\overline{\varphi}_k(t_j)$ und einige eindimensionale Vektoren gespeichert werden, sodaß der Speicheraufwand in der Größenordnung $N \times n$ liegt, was auch bei sehr feinen Diskretisierungen ($N=200$) und hohen Dimensionen ($n=14$) keinerlei Speicherprobleme mit sich bringt. Die numerischen Testbeispiele zeigen außerdem, daß es genügt, den Approximationsraster wesentlich gröber zu wählen als die Diskretisierungsfeinheit der Randwertprobleme (z.B. $N/2$ oder $N/4$; die Ordnung der Konvergenz der besten Approximation auf dem Gitter gegen die beste kontinuierliche Approximation ist ebenfalls $O((\Delta t)^2)$, falls die Feinheit des Approximationsrasters als konstanter Bruchteil der Diskretisierungsfeinheit N gewählt wird (Chalmers [18])).

Die Anzahl K der Simplexaustauschschritte hängt, wie auch in [4] erwähnt, hauptsächlich von der Dimension des Parameterraumes und nur unwesentlich von der Feinheit des Approximationsrasters ab (K liegt erfahrungsgemäß zwischen $3n$ und $5n$), sodaß trotz der Größe des Simplextableaus der Rechenaufwand relativ gering bleibt. Die Lösung der linearen Approximationsprobleme benötigt im Durchschnitt weniger Rechenzeit als die Berechnung der Basis des TRes, insbesondere dann, wenn die Approximationsdiskretisierung gröber als die Randwertproblemdiskretisierung gewählt wird.

4.4 Berücksichtigung von Restriktionen

Faßt man das ISP als Kontroll- oder Identifikationsproblem auf, so ist es sinnvoll, bei der Approximationsaufgabe (3.2.1) zusätzliche Kontrollrestriktionen, also Bedingungen an g , zu berücksichtigen, z.B. um den Bereich A der zulässigen Parameter zu beschreiben. Kontrollrestriktionen der Form:

$$(4.4.1) \quad \bigwedge_{0 \leq t \leq T} m(t) \leq \sum_{k=1}^n a_k v_k(t) \leq M(t) ,$$

mit stetigen Funktionen m und M werden ebenso wie das lineare Approximationsproblem diskretisiert:

$$(4.4.2) \quad \bigwedge_{0 \leq j \leq N} m(t_j) \leq \sum_{k=1}^n a_k v_k(t_j) \leq M(t_j) .$$

Sie liefern für den Simplexalgorithmus $2N$ zusätzliche Restriktionen an den Parametervektor a , allerdings gelingt es durch eine geschickte Kennzeichnung der aktiven und inaktiven Restriktionen das Simplextableau nur um $N+1$ Spalten zu erweitern (um die Matrix $(v_k(t_j))$), sodaß sich der Speicher- aufwand ungefähr verdoppelt (ähnlich [1]).

Da es sich bei (4.4.1) um konvexe lineare Restriktionen an den Parameterraum und nicht an die Approximationsmenge $S(A)$ handelt, bleiben die übrigen Schritte des Verfahrens (4.1.1) unberührt.

Allerdings gelang es uns bisher nicht, den Charakterisierungssatz (3.5.4) für die beste Approximation auf den restringierten Fall zu verallgemeinern. Hier können wir nur auf numerische Ergebnisse verweisen.

Bei der Programmierung des modifizierten Simplexverfahrens von Barrodale und Young verwendeten wir ähnliche Signifikanztests für die Abstiegsrichtung und die Austauschzeile (Pivotelement) wie Cromme [28,29]. Auch in unserem Fall scheinen die dort angegebenen Rundungsfehlerschranken die tatsächlichen Rundungsfehler bei weitem zu überschätzen, sodaß die Schranken mit "Erfahrungskonstanten" (wie in Cromme [30]) gewichtet wurden, was zu guten Ergebnissen führte.

4.5 Lineare Suche

Wie bereits im 1. Abschnitt erwähnt, ist es aufgrund der Nichtdifferenzierbarkeit der Funktion $\rho(\lambda)$ sinnvoll, die lineare Suche mit Hilfe eines primitiven Suchverfahrens durchzuführen. Wir wählten dazu die Fibonacci-Methode (Ortega, Reinboldt [58]) und werteten ρ im Intervall $[0,1]$ höchstens achtmal aus (um eine relative Genauigkeit der Minimalstelle von 10 Prozent zu garantieren), wozu jedesmal ein FRWP gelöst und die T-Norm der Abweichungsfunktion bestimmt werden mußte.

Wenn zum ersten Mal $\lambda^i \in [0.9, 1]$ gewählt wurde, wurde bei allen weiteren Iterationen die lineare Suche übersprungen und mit $\lambda^i = 1$ gerechnet. Bei der Rechnung der Testbeispiele zeigte sich, daß die lineare Suche den Bereich der für die Konvergenz des Verfahrens (4.1.1) zulässigen Startparameter ("Einzugsbereich") wesentlich vergrößert und normalerweise bereits nach der zweiten Iteration übersprungen werden kann, sodaß der hohe Aufwand gerechtfertigt erscheint.

4.6 Numerische Testbeispiele

Das Verfahren (4.1.1) wurde anhand von 20 Beispielen, die sich durch die Wahl der Anfangsfunktion f und der zu approximierenden Funktion $\tilde{s}$ unterschieden, numerisch getestet. Innerhalb der Testbeispiele variierten wir zusätzlich die Randbedingung auf der t-Achse ("Dirichlet" und "Neumann"), den Ansatzraum V (Polynome, T-Polynome, lineare Splines), dessen Dimension (zwischen 1 und 13), die Art der Kontrollrestriktionen und die Feinheit der einzelnen Diskretisierungen.

Sechs typische Programmläufe werden im Folgenden tabellarisch dargestellt und die Resultate anhand von je drei Zeichnungen (Kontroll-, Rand- und Fehlerkurven) illustriert. An Spalte 4 der Tabellen kann die quadratische Konvergenz deutlich abgelesen werden. Alle Rechnungen wurden an der CYBER 175 (CDC) des Leibniz-Rechenzentrums . München durchgeführt.

Beispiel 1

$$\tilde{s}(t) = t + \frac{1}{4} \cos(4t) , \quad 0 \leq t \leq 2 ,$$

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{4} - x\right) - 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4} = \tilde{s}(0)$$

Kontrollrestriktionen:	keine
Daten auf der t-Achse:	Neumann
Ansatzraum V :	T-Polynome, $\dim(V) = 3$
Ortsdiskretisierung:	J = 50
Zeitdiskretisierung:	N = 200
Feinheit des Approximationsgitters:	50

Rechenzeiten (CPU-Zeit in Sek. pro Iteration):

Lösung der FRWPe:	0.093
Berechnung des TRes:	0.319
Lösung der lin. Probleme:	0.124 (Durchschnitt)

Gesamtrechenzeit nach 5 Iterationen: 2.900

Startkontrolle: $u_0 = -1$

Parameter der optimalen Kontrolle:

-3.819990 , -4.601803 , 0.130939 .

Bemerkungen:

Bei der Rechnung wurde die Bedingung $g \leq 0$ nicht berücksichtigt, da die Prozeduren zur Lösung der Randwertprobleme auch nichtmonotone Ränder verarbeiten können. Die beste Approximation s^* ist nicht monoton. Die Länge 4 der Alternante stimmt mit dem theoretischen Wert $(\dim(V) + 1)$ überein.

Iteration	$\ \tilde{s}-S(a^i)\ $	$\ \tilde{s}-S(a^i)-S'_i(\Delta a^i)\ $	$\ \Delta a^i\ _\infty$	Simpl.-It.
-----------	------------------------	---	-------------------------	------------

0	0.5667	---	---	---
1	0.2549	0.1500	1.892588	7
2	0.1846	0.1777	3.119331	8
3	0.1728	0.1725	0.802718	7
4	0.1724	0.1723	0.027003	9
5	0.1724	0.1724	0.000031	9

Tabelle 1 : Beispiel 1 , $\dim(V) = 3$.

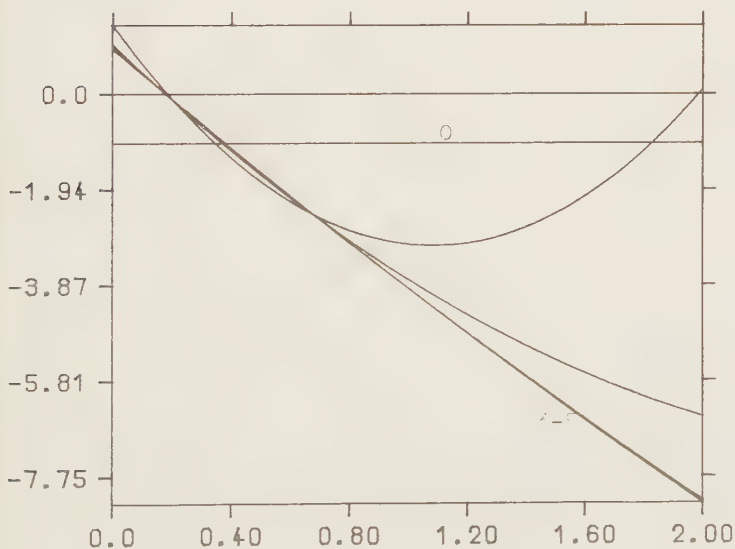


Abb.1 : Beispiel 1 , Folge der berechneten Kontrollen

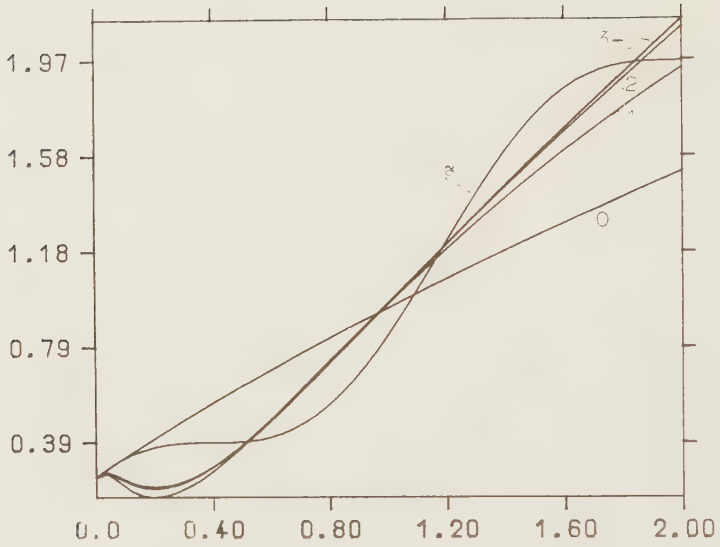


Abb.2 : Beispiel 1 , Folge der Ränder und $\tilde{s}$

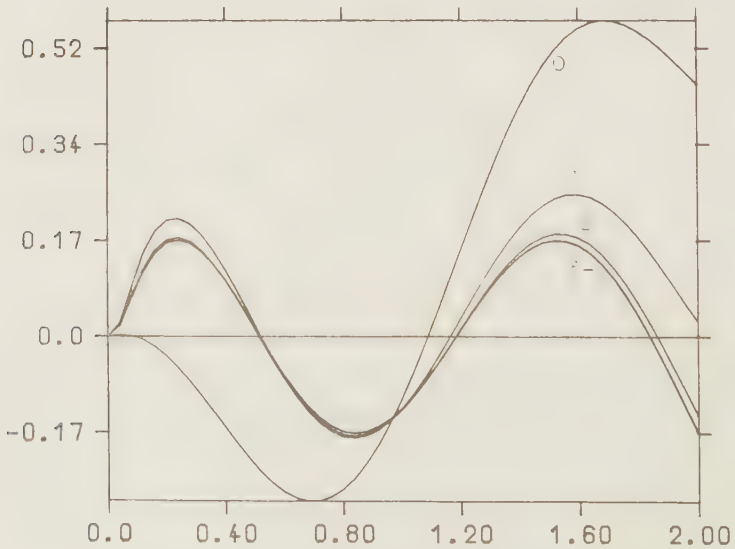


Abb.3 : Beispiel 1 , Folge der Fehlerkurven

Beispiel 2

$$\tilde{s}(t) = t + \frac{1}{4} \exp(-t), \quad 0 \leq t \leq 2,$$

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{4} - x\right) - 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}.$$

Kontrollrestriktionen:	keine
Daten auf der t-Achse:	Neumann
Ansatzraum V :	T-Polynome, $\dim(V) = 4$
Ortsdiskretisierung:	J = 50
Zeitdiskretisierung:	N = 200
Feinheit des Approximationsgitters:	50

Rechenzeiten (CPU-Zeit in Sek. pro Iteration):

Lösung der FRWPe:	0.093
Berechnung des TRes:	0.437
Lösung der lin. Probleme:	0.191 (Durchschnitt)

Gesamtrechenzeit nach 4 Iterationen: 3.102

Startkontrolle: optimale Kontrolle für $\dim(V) = 3$

Parameter der optimalen Kontrolle:

9.519128 , 20.527427 , 15.901680 , 8.401947 .

Bemerkungen:

Durch die Wahl der Startkontrolle ("boot strapping") liegt die relative Parametergenauigkeit bereits nach 4 Iterationen unter 0.1 Prozent. Wie bei Beispiel 1 beträgt die durchschnittliche Anzahl der Simplexiterationen ca. dreimal $\dim(V)$. Durch die Erhöhung der Dimension des Ansatzraumes um 1 wird der Minimalabstand annähernd halbiert (siehe Beispiel 1).

Iteration	$\ \tilde{s}-S(a^i)\ $	$\ \tilde{s}-S(a^i)-S'_{a^i}(\Delta a^i)\ $	$\ \Delta a^i\ _\infty$	Simpl.-It.
0	0.1724	---	---	---
1	0.1009	0.0928	22.812720	10
2	0.0896	0.0889	2.028084	13
3	0.0890	0.0890	0.286621	11
4	0.0890	0.0890	0.012354	12

Tabelle 2 : Beispiel 2 , $\dim(V) = 4$.

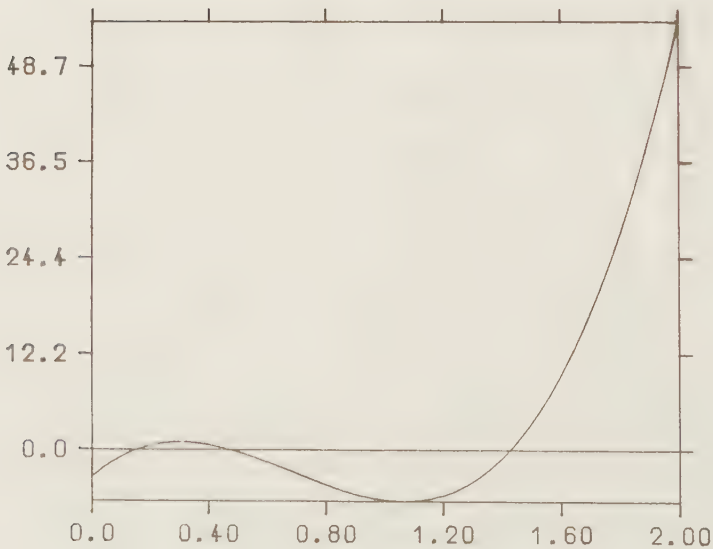


Abb.4 : Beispiel 2 , optimale Kontrolle

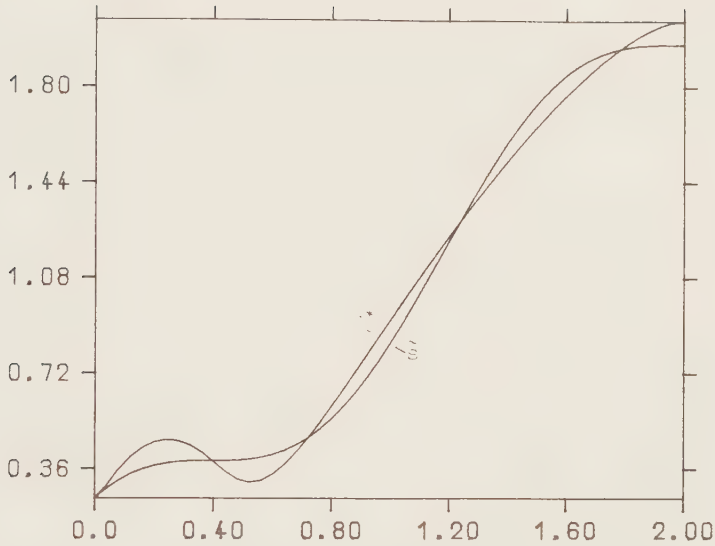


Abb.5 : Beispiel 2 , $\tilde{s}$ und der optimale Rand s^*

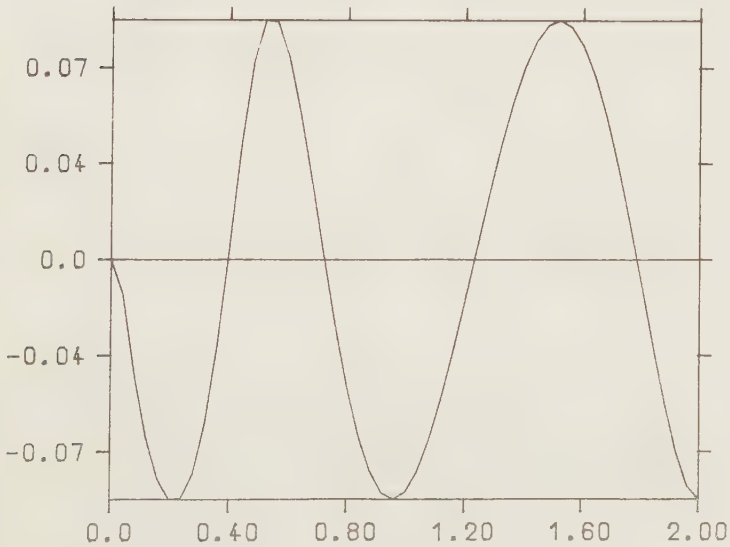


Abb.6 : Beispiel 2 , zugehörige Alternante

Beispiel 3

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} 1 + t, & 0.00 \leq t \leq 0.25 \\ \frac{3}{4} + 2t, & 0.25 < t \leq 0.50 \quad (\text{Polygonzug}) \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t, & 0.50 < t \leq 1.00 \end{cases}$$

$$f(x) = \exp(1-x) - 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Kontrollrestriktionen:	keine
Daten auf der t-Achse:	Dirichlet
Ansatzraum V :	T-Polynome, $\dim(V) = 3$
Ortsdiskretisierung:	J = 50
Zeitdiskretisierung:	N = 200
Feinheit des Approximationsgitters:	50

Rechenzeiten (CPU-Zeit in Sek. pro Iteration):

Lösung der FRWPe:	0.092
Berechnung des TRes:	0.319
Lösung der lin. Probleme:	0.104 (Durchschnitt)

Gesamtrechenzeit nach 5 Iterationen: 2.811

Startkontrolle: $u_0 = 0$

Parameter der optimalen Kontrolle:

-7.208105, -1.752636, -7.161419.

Bemerkungen:

Trotz der Irregularität von $\tilde{s}$ ist der Minimalabstand von 0.07 relativ klein im Vergleich zu den Beispielen 1 und 2.

Die beste Approximation s^* ist nicht monoton.

Iteration $\|\tilde{s}-S(a^i)\|$ $\|\tilde{s}-S(a^i)-S'_{a^i}(\Delta a^i)\|$ $\|\Delta a^i\|_\infty$ Simpl.-It.

0	0.7979	---	---	---
1	0.2425	0.0575	2.375124	7
2	0.0989	0.0675	8.477699	7
3	0.0719	0.0683	6.531450	6
4	0.0701	0.0699	0.142085	6
5	0.0700	0.0700	0.005143	7

Tabelle 3 : Beispiel 3 , $\dim(V) = 3$.

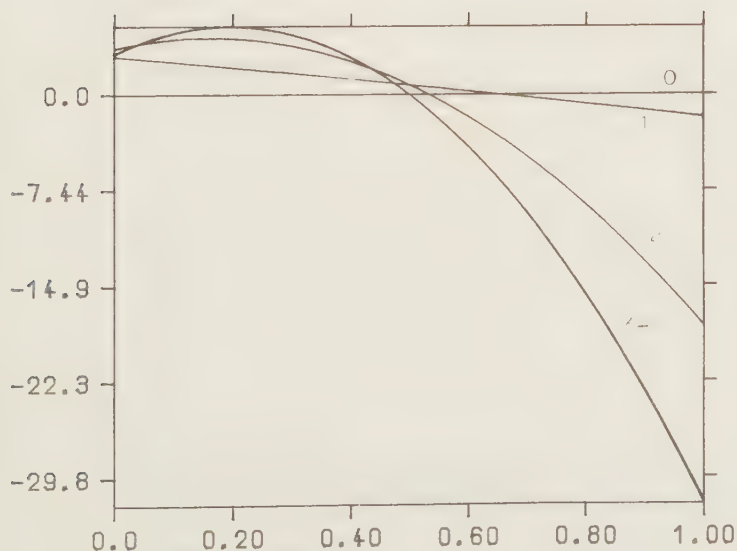


Abb.7 : Beispiel 3 , Folge der berechneten Kontrollen

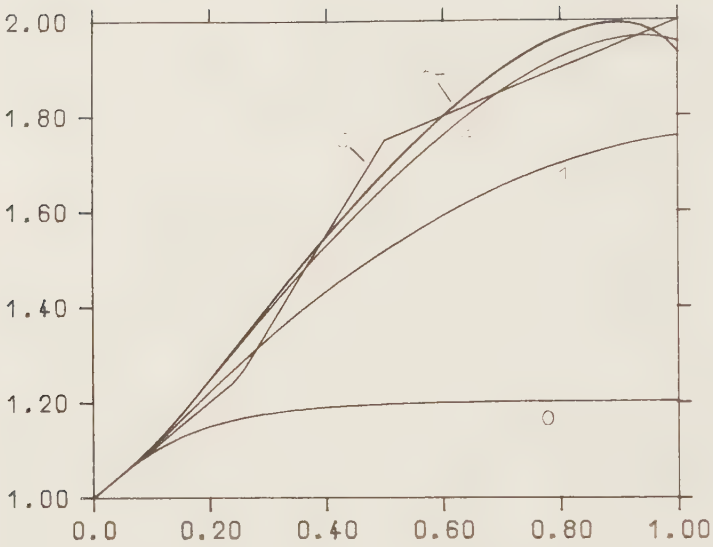


Abb.8 : Beispiel 3 , Folge der Ränder und $\tilde{S}$

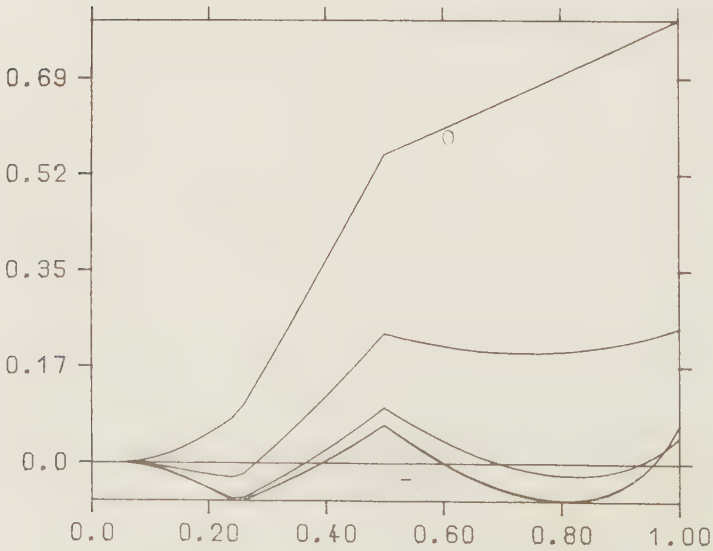


Abb.9 : Beispiel 3 , Folge der Fehlerkurven

Beispiel 4

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} t, & 0.00 \leq t \leq 0.25 \\ \frac{3}{4} + 2t, & 0.25 < t \leq 0.50 \quad (\text{Polygonzug}) \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t, & 0.50 < t \leq 1.00 \end{cases}$$

$$f(x) = \exp(1-x) - 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Kontrollrestriktionen: keine
Daten auf der t-Achse: Dirichlet
Ansatzraum V: T-Polynome, $\dim(V) = 7$
Ortsdiskretisierung: J = 50
Zeitdiskretisierung: N = 200
Feinheit des Approximationsgitters: 50

Rechenzeiten (CPU-Zeit in Sek. pro Iteration):

Lösung der FRWPe: 0.098
Berechnung des TRes: 0.767
Lösung der lin. Probleme: 0.797 (Durchschnitt)

Gesamtrechenzeit nach 5 Iterationen: 8.563

Startkontrolle: u_0 = optimale Kontrolle für $\dim(V) = 3$

Parameter der optimalen Kontrolle:

201.318 , 376.219 , 333.271 , 259.008 , 178.563 ,
101.634 , 46.023 .

Bemerkungen:

Aufgrund der Unlösbarkeit des ISPs wächst die Parameternorm stark an. Die Lösung der linearen Approximationsprobleme beansprucht zum ersten Mal mehr Zeit als die Berechnung des Tangentialraumes.

Bei allen bisherigen Beispielen stimmt die Alternantenlänge mit dem theoretischen Wert ($\dim(V) + 1$) überein.

Iteration	$\ \tilde{s}-S(a^i)\ $	$\ \tilde{s}-S(a^i)-S'_{a^i}(\Delta a^i)\ $	$\ \Delta a^i\ _{\infty}$	Simpl.-It.
0	0.0700	---	---	---
1	0.0315	0.0150	314.79526	23
2	0.0187	0.0178	81.51271	31
3	0.0184	0.0179	4.34387	56
4	0.0184	0.0183	0.69176	37
5	0.0184	0.0184	0.00538	42

Tabelle 4 : Beispiel 4 , $\dim(V) = 7$

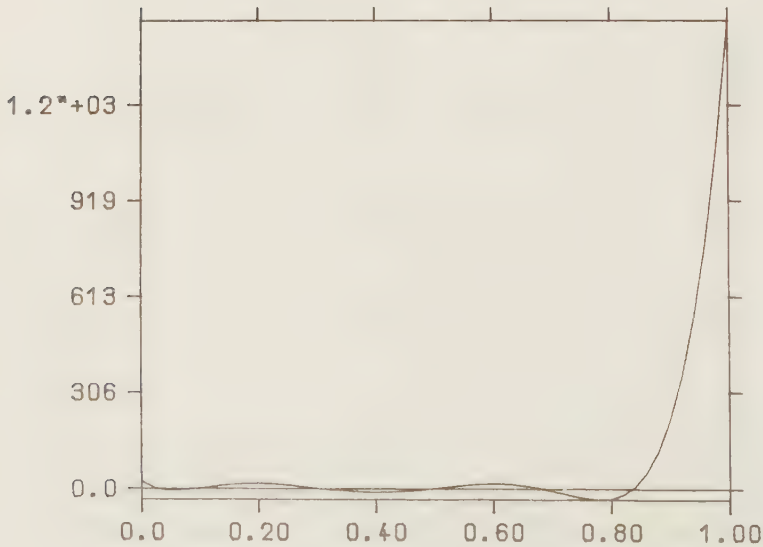


Abb.10 : Beispiel 4 , optimale Kontrolle

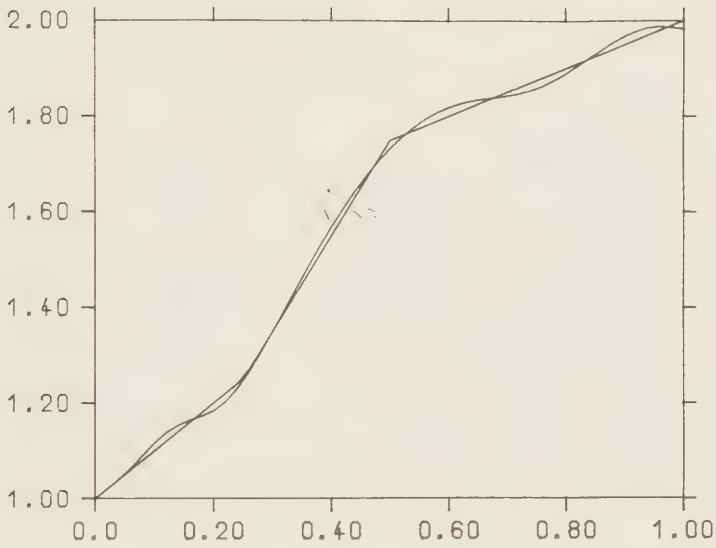


Abb.11 : Beispiel 4 , $\tilde{s}$ und der optimale Rand s^*

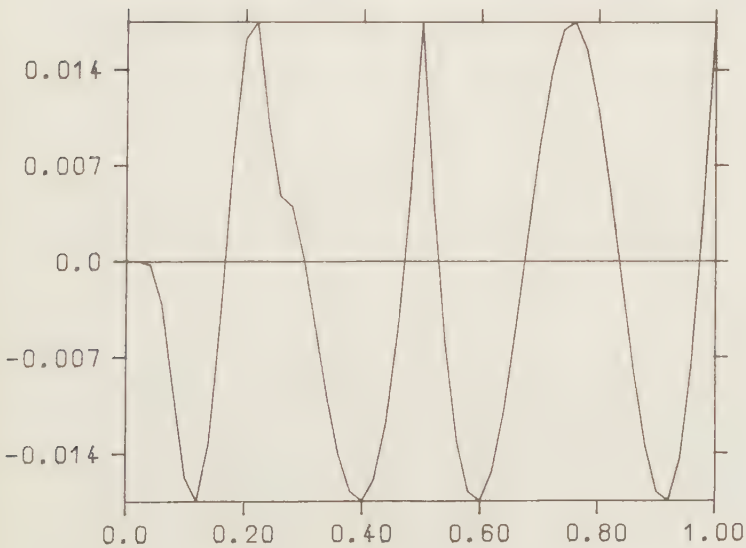


Abb.12 : Beispiel 4 , zugehörige Alternante

Beispiel 5

$$\tilde{s}(t) = \left(\frac{1}{4} + t\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{2} - x\right) - 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Kontrollrestriktionen: $m(t) = 0$ $0 \leq t \leq 1$
 $M(t) = 250t\left(\frac{1}{4} + t\left(-\frac{5}{4} + t(2-t)\right)\right)$

Daten auf der t -Achse: Dirichlet

Ansatzraum V : T -Polynome, $\dim(V) = 6$

Ortsdiskretisierung: $J = 50$

Zeitdiskretisierung: $N = 200$

Feinheit des Approximationsgitters: 50

Rechenzeiten (CPU-Zeit in Sek. pro Iteration):

Lösung der FRWPe:	0.093
Berechnung des TRes:	0.640
Lösung der lin. Probleme:	0.358 (Durchschnitt)

Gesamtrechenzeit nach 6 Iterationen: 6.884

Startkontrolle: $u_0 \equiv 0$

Parameter der optimalen Kontrolle:

0.776641 , 0.417163 , 0.000000 , -0.176747 , -0.776641 ,
 -.240417 .

Bemerkungen:

Die Restriktionen schneiden sich in $t=0$ und $t=1$ und berühren sich in $t=\frac{1}{2}$ (siehe Abb. 13). Die daraus resultierenden 4 Interpolationsbedingungen für die Kontrollen nehmen dem Ansatzraum 4 Freiheitsgrade. Die Alternante besitzt daher nur die Länge 3. Es konnte nicht geklärt werden, in welcher Reihenfolge die Anstoßpunkte (an die Restriktionen) und die Alternantenpunkte gezählt werden müssen.

Iteration	$\ \tilde{s}-S(a^i)\ $	$\ \tilde{s}-S(a^i)-S'_{ai}(\Delta a^i)\ $	$\ \Delta a^i\ _\infty$	Simpl.-It.
0	0.5696	---	---	---
1	0.1777	0.0633	0.33821279	19
2	0.0631	0.0504	0.31586417	19
3	0.0478	0.0473	0.15719853	18
4	0.0472	0.0470	0.01287328	16
5	0.0471	0.0471	0.00005423	16
6	0.0471	0.0471	0.00000000	15

Tabelle 5 : Beispiel 5 , $\dim(V) = 6$.

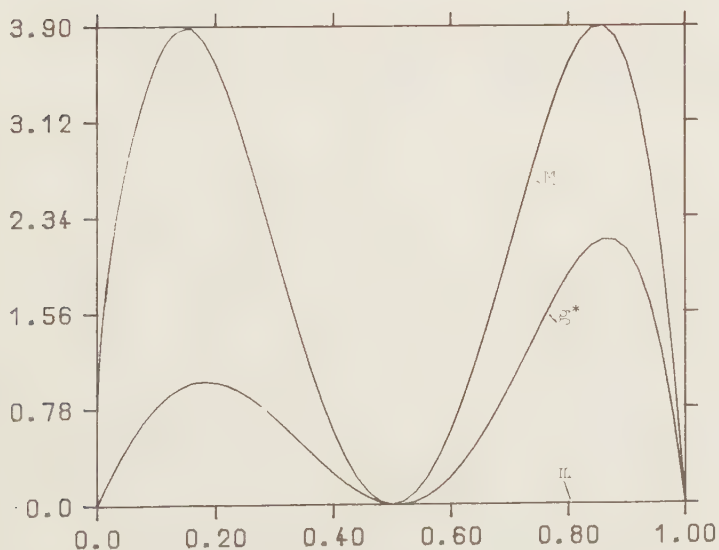


Abb.13 : Beispiel 5 , Restriktionen und g^*

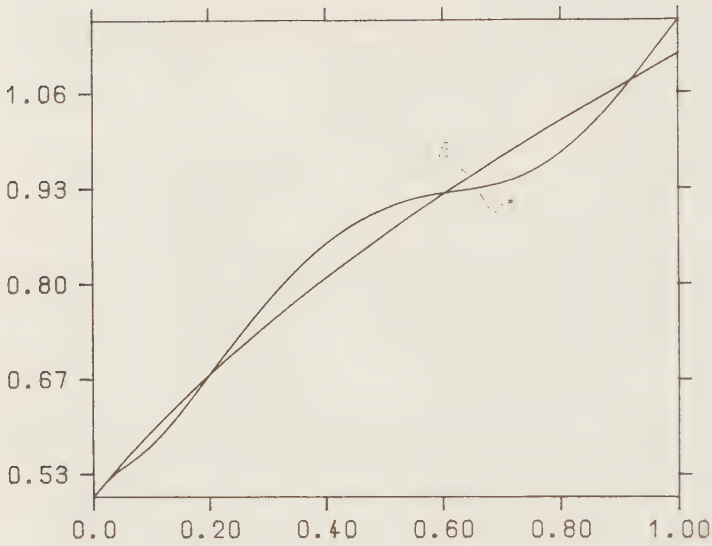


Abb.14 : Beispiel 5 , $\tilde{s}$ und der optimale Rand s^*

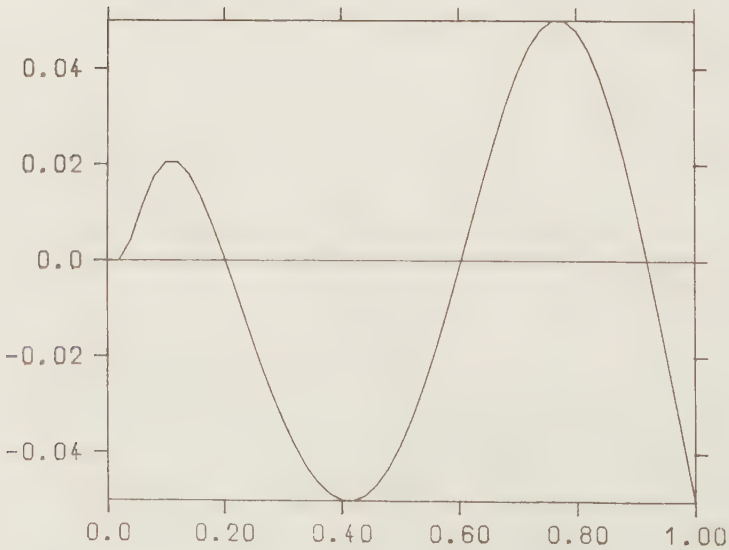


Abb.15 : Beispiel 5 , zugehörige Alternante

Beispiel 6

$$\tilde{s}(t) = \left(\frac{1}{4} + t\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{2} - x\right) - 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Kontrollrestriktionen:} \quad m(t) = 0 \\ \quad \quad \quad M(t) = 250t\left(\frac{1}{4} + t\left(-\frac{5}{4} + t(2-t)\right)\right) \end{array} \right\} 0 \leq t \leq 1$$

Daten auf der t-Achse: Dirichlet

Ansatzraum V : T-Polynome, $\dim(V) = 10$

Ortsdiskretisierung: J = 50

Zeitdiskretisierung: N = 200

Feinheit des Approximationsgitters: 50

Rechenzeiten (CPU-Zeit in Sek. pro Iteration):

Lösung der FRWPe: 0.092

Berechnung des TRes: 1.063

Lösung der lin. Probleme: 1.711 (Durchschnitt)

Gesamtrechenzeit nach 6 Iterationen: 17.575

Startkontrolle: $u_0 \equiv 0$

Parameter der optimalen Kontrolle:

0.517475 , -0.136217 , -0.197073 , -0.216300 , -0.166899 ,
-0.014258 , 0.197073 , 0.233555 , -0.350576 , 0.133220 .

Bemerkung:

Der Minimalabstand verkleinert sich trotz der hohen Dimension des Ansatzraumes gegenüber Beispiel 5 nur unwesentlich.

Iteration	$\ \tilde{s}-S(a^i)\ $	$\ \tilde{s}-S(a^i)-S'_{a^i}(\Delta a^i)\ $	$\ \Delta a^i\ _\infty$	Simpl.-It.
0	0.5696	---	---	---
1	0.1751	0.0292	0.37133679	31
2	0.0346	0.0246	0.25314499	65
3	0.0249	0.0244	0.08481374	76
4	0.0247	0.0245	0.09703915	68
5	0.0246	0.0246	0.00101170	71
6	0.0246	0.0246	0.00000009	71

Tabelle 6 : Beispiel 6 , $\dim(V) = 10$.

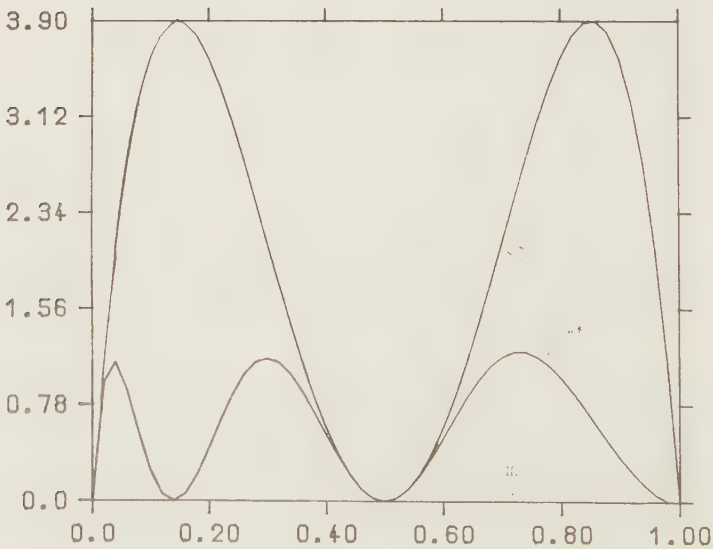


Abb.16 : Beispiel 6 , Restriktionen und g^*

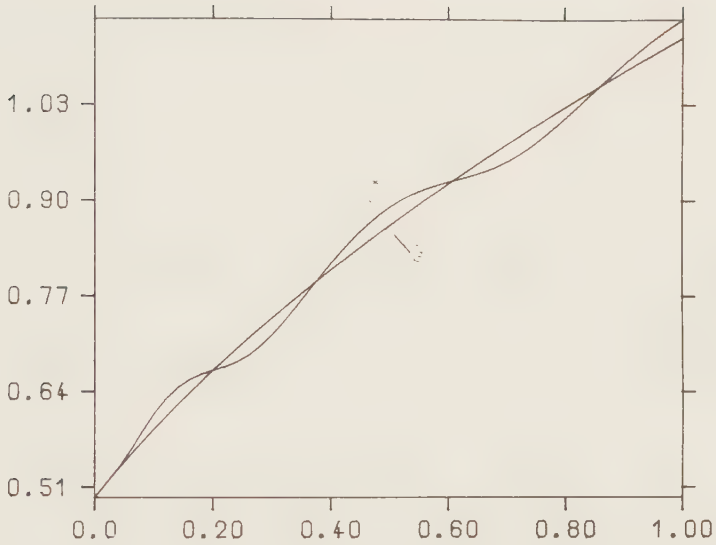


Abb.17 : Beispiel 6 , $\tilde{s}$ und der optimale Rand s^*

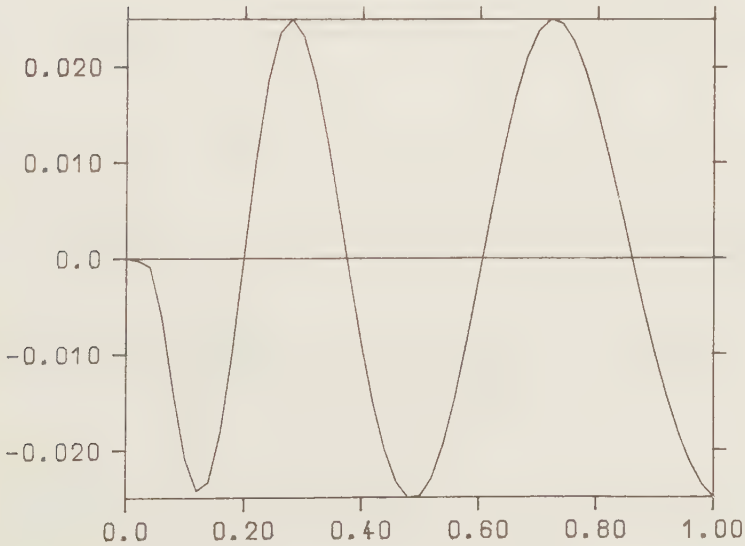


Abb.18 : Beispiel 6 , zugehörige Alternante

V. Zusammenfassung

Die unstetige Abhängigkeit der Lösung von den Datenfunktionen verursacht bei der numerischen Behandlung des ISPs erhebliche Schwierigkeiten. Die bisher verwendeten Verfahren (siehe Abschnitt (1.1)) sind aufgrund ihrer Rundungsfehleranfälligkeit bzw. ihrer geringen Konvergenzgeschwindigkeit nur bedingt einsatzfähig.

Ziel dieser Arbeit war es daher, einen "robusten" Algorithmus zu konstruieren, der auch im Fall nichtexakter Kontrollierbarkeit (d.h. Lösbarkeit des ISPs) unabhängig von eventuell auferlegten Kontrollrestriktionen eine gute Approximation s^* für den gesuchten Rand $\tilde{s}$ liefert. Die Formulierung des ISPs als nichtlineares Tschebyscheff-Approximationsproblem:

Suche ein $g^* \in A$, sodaß

$$\|\tilde{s} - S(g^*)\|_T = \inf\{\|\tilde{s} - S(g)\|_T \mid g \in A\},$$

(wobei $S: g \mapsto s$ der Lösungsoperator des FRWPs (2.1.1-5) und A die Menge der zulässigen Kontrollen ist) gestattet die Anwendung eines Newton-ähnlichen, iterativen Verfahrens (Verfahren (4.1.1)), dessen Konvergenz von Cromme [25] unter bestimmten Voraussetzungen an die Parametrisierung S der nichtlinearen Approximationsfamilie bewiesen wurde.

Das Verfahren (4.1.1) besteht i.w. in der lokalen Linearisierung des nichtlinearen Approximationsproblems und einer daraus (im i -ten Schritt) nach folgender Vorschrift zu berechnenden "Newton-Korrektur" Δg^i :

$$\|\tilde{s} - S(g^i) - S'_{g^i}(\Delta g^i)\|_T = \inf\{\|s - S(g^i) - S'_{g^i}(\Delta g)\|_T \mid g + \Delta g \in A\}.$$

S'_g steht dabei für die Frechet-(F-) Ableitung des Lösungsoperators S im Punkt $g \in A$. Der zur Durchführung des Verfahrens notwendige Nachweis der F-Differenzierbarkeit von S erfolgte im zweiten Kapitel, die Analyse der approximationstheoretischen Eigenschaften der nichtlinearen Menge $S(A)$ im dritten.

5.5 Analytische Eigenschaften des Lösungsoperators S

Die Herleitung des die lineare Abbildung $S'_g: h \mapsto \delta s$ definierenden Gleichungssystems ("Ableitungssystem"):

$$\delta s(t) = - \int_0^t h(\tau) d\tau - \int_0^s z(x,t) dx ,$$

$$Lz=0 \text{ in } \Omega(\sigma) , \quad z(x,0)=0 , \quad z_x(0,t)=h(t) ,$$

$$z(s(t),t) = \dot{s}(t) \delta s(t) ,$$

gelang zunächst unter der Annahme der F-Differenzierbarkeit von S in Abschnitt (2.3). Dazu wurde in Satz (2.3.5) gezeigt, daß eine Funktion $\delta s = S'_g h$ mit der "Frechet-Eigenschaft" ,

$$(5.5.1) \quad \|S(g+h) - S(g) - S'_g h\|_T = o(\|h\|_T) ,$$

notwendig diesem über die rechte Randbedingung gekoppelten System genügen muß. Erst eine geeignete Entkopplung (mittels der Transformation $y(x,t) = - \int_0^t h(\tau) d\tau - \int_0^x z(\xi,t) d\xi$, Abschnitt (2.4)) ermöglichte auch den Beweis der Hinlänglichkeit, nämlich der eindeutigen Lösbarkeit des Ableitungssystems und der Frechet-Eigenschaft der Lösungsfunktion δs . Existenz und Eindeutigkeit konnten mit Standardsätzen von Friedman [36] bewiesen werden (Satz (2.5.1)).

Der Nachweis der F-Eigenschaft erforderte die Hauptarbeit des zweiten Kapitels. Die Stetigkeit und die Antitonia des linearen Lösungsoperators $h \mapsto \delta s$ lieferten i.w. das "strenge

Maximumprinzip" und die parabolische Version des "Hopfschen Lemmas" (Satz (2.6.1)). Eine der Entkopplungstransformation des Ableitungssystems ähnliche Transformation der Lösung (u, s) des FRWPs (2.1.1-5) führte zu einem Randwertproblem für die Funktion $v = \bar{U} - U - y$, wobei $\bar{U}$ und U die Transformaten der zur Kontrolle $g+h$ gehörigen Lösung $\bar{u}$ bzw. der zu g gehörigen Lösung u sind. Verschärfte a-priori-Abschätzungen höherer Ableitungen von u bzw. der Abhängigkeit der Ableitung $\dot{s}$ von der Kontrolle g (Abschnitt (2.2)) ermöglichten die Abschätzung gemischter Randbedingungen von v durch Ausdrücke der Ordnung $O(\|h\|_{\mathbb{T}}^2)$. Eine Analyse der Abhängigkeit der Lösung v von den gemischten Randbedingungen (über eine geeignete Integralgleichung, Satz (2.6.5)) ergab schließlich die Beziehung (5.1.1).

Zusätzlich zur punktwisen F-Differenzierbarkeit von S benötigt man zum Nachweis der quadratischen Konvergenz des Verfahrens (4.1.1) (wie üblich bei Newton-ähnlichen Verfahren) die Lipschitz-Stetigkeit der F-Ableitung $S': g \mapsto S'_g$, d.h.

$$\|(S'_{g+\Delta g} - S'_g)h\|_{\mathbb{T}} \leq C \|\Delta g\|_{\mathbb{T}} \|h\|_{\mathbb{T}} \quad .$$

Ihr Nachweis gelang über die Herleitung der singulären Volterraschen Integralgleichung,

$$\delta s(t) - 2 \int_0^t N_x(s(t), t, s(\tau), \tau) \delta s(\tau) d\tau = 2 \int_0^t N_x(s(t), t, 0, \tau) H(\tau) d\tau,$$

für die Bildvariation $\delta s = S'_g h$. Zur Abschätzung der Differenz von $\delta \bar{s}$ und δs in Abhängigkeit von der Störung Δg (die die Störung $\Delta s = \bar{s} - s$ erzeugt) wurden wieder a-priori-Abschätzungen höherer Ableitungen von s und u aus Abschnitt (2.2) verwendet.

Die Lipschitz-stetige Frechet-Differenzierbarkeit des Lösungsoperators S stellt das zentrale Ergebnis des zweiten Kapitels dar. Die letzten drei Abschnitte (2.8-10) dienen der Ergänzung und Verallgemeinerung dieser Resultate auf den Fall von Dirichlet-Daten auf der t -Achse, die inhomogene WLK und den bisher ausgeklammerten Fall $s(0)=0$.

5.2 Existenz und Charakterisierung bester Approximationen

Im dritten Kapitel wurden die approximationstheoretischen Eigenschaften der nichtlinearen Abbildung S bzw. der durch sie definierten nichtlinearen Funktionenfamilie untersucht.

Die wesentlichen Merkmale des L_2 -Approximationsproblems, nämlich die Differenzierbarkeit des L_2 -Fehlerfunktional, die Charakterisierung des Gradienten durch die adjungierten Gleichungen (Satz (3.1.3)) und der Nachweis der Eindeutigkeit der Minimalkontrolle g^* (Satz (3.1.10)) trotz der Nichtkonvexität des Fehlerfunktional (Satz (3.1.13)), bilden den Inhalt des ersten Abschnitts (3.1).

Das interessantere Tschebyscheff-Approximationsproblem wurde in allen weiteren Abschnitten diskutiert. Für den Fall eines beliebigen endlichdimensionalen Ansatzraumes $V \subset A$ konnte die Frage nach der Existenz einer besten Approximation s^* positiv beantwortet werden (Satz (3.2.2)), indem gezeigt wurde, daß alle Kontrollen g , die zu Rändern $s \in S(A)$ mit $b \leq s(t) \leq M$ gehören, in einer kompakten Teilmenge $K \subset A$ enthalten sind, wobei K nur von M abhängt. Die Erschließung des Zusammenhangs zwischen M und den die Menge K beschreibenden Restriktionen erfolgte in zwei Schritten:

Zunächst wurde die zu s gehörige Lösung u des FRWPs (2.1.1-5) durch die Lösung w eines Randwertproblems auf dem festen Rechteck $[0, M] \times [0, T]$ majorisiert, um dann aus der doppelten Ungleichung,

$$0 \leq \int_0^T w_x(M, \tau) d\tau \leq M \quad ,$$

(über die Singularitätenfunktion der WLK) unendlich viele Restriktionen für die Funktion $g(t) = w_x(0, t)$ abzuleiten. Durch eine geeignete Auswahl von n ($= \dim(V)$) linear unabhängigen Restriktionen konnte schließlich die Menge K beschrieben werden.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit und zur Charakterisierung der besten Approximation durch Alternanteneigenschaften ist im Fall linearer Tschebyscheff-Approximationsaufgaben die "Haarsche Bedingung" hinreichend (d.h. jede nichttriviale Funktion aus dem n -dimensionalen Approximationsraum hat höchstens $n-1$ verschiedene Nullstellen). Verallgemeinerungen auf den nichtlinearen Fall sind die "globale Haarsche Bedingung" (jede nichttriviale Differenz zweier approximierender Funktionen hat höchstens $n-1$ Nullstellen) und die "lokale Haarsche Bedingung" (in jedem Punkt $g \in A$ ist der Tangentialraum $S'_g(V)$ Haarsch). Mit ihrer Hilfe läßt sich der aus der linearen Approximationstheorie bekannte Alternantensatz auf den nichtlinearen Fall verallgemeinern (Meinardus [55]).

Es war also die Anzahl der Nullstellen der Differenz Δs zweier Ränder (bzw. der Bildvariation δs) in Abhängigkeit von der Anzahl der Nullstellen der Differenz der zugehörigen Kontrollen (bzw. der Variation) h abzuschätzen. Dies gelang durch eine eingehende Untersuchung der Nullstellengebilde der Differenz w der beiden zugehörigen Lösungen u und $\bar{u}$. Wesentliche Hilfsmittel waren dabei das Hopfsche Lemma und das strenge Maximumprinzip. Etwas vergrößert lautete unser Ergebnis:

Die Differenz Δs (Variation δs) besitzt im halboffenen Intervall $(0, T]$ höchstens so viele Nullstellen wie die Differenz der Kontrollen (Variation) h (Satz (3.3.4, 9)).

Da die Approximationsmenge $S(A)$ die Haarschen Bedingungen bei Haarschem Ansatzraum V nur im halboffenen Intervall $(0, T]$ erfüllt (da $\Delta s(0)=0$ bzw. $\delta s(0)=0$ gilt), konnten die Eindeutigkeit und die Alternanteneigenschaft zunächst nur für die besten Approximationen s_ϵ^* auf den kleineren Intervallen $[\epsilon, T]$, $\epsilon > 0$, nachgewiesen werden (Lemma (3.5.1)). Erst eine gleichmäßige Abschätzung der Ableitung $\dot{s}$ für Ränder $s \in S(A \cap K)$ mit einer geeigneten kompakten Menge K implizierte, daß die besten Approximationen s_ϵ^* für $\epsilon \rightarrow 0$ ab einem bestimmten $\delta > 0$ bereits beste Approximationen auf dem Intervall $[0, T]$ sind (Satz (3.5.4)).

Neben der Lipschitz-stetigen F-Differenzierbarkeit erfordert der Beweis der quadratischen Konvergenz des Verfahrens (4.1.1) nicht nur die Eindeutigkeit der besten Approximation s^* , sondern als zweite entscheidende Voraussetzung die sogenannte "starke Eindeutigkeit":

$$\forall_{r>0} \quad \bigwedge_{s \in S(A)} \quad \|s - \tilde{s}\|_T - \|s^* - \tilde{s}\|_T \geq r \|s - s^*\|_T .$$

Die lokale starke Eindeutigkeit (d.h. starke Eindeutigkeit innerhalb einer geeigneten Umgebung von s^*) folgt fast unmittelbar aus bekannten Sätzen von Wulbert [73,74], die globale konnte direkt (durch eine Verallgemeinerung des Beweises von Cheney [21] für den linearen Fall) mittels eines Kompaktheitsargumentes aus dem Existenzsatz (3.2.2) gezeigt werden.

Den Abschluß des dritten Kapitels bildet eine Einschließung des Minimalabstandes ρ (Satz (3.7.1)), welche ein nützliches Abbruchkriterium für numerische Approximationsverfahren liefert.

5.3 Konvergenz und numerische Realisierung

Mit den theoretischen Resultaten des zweiten und dritten Kapitels waren alle Voraussetzungen gegeben, die zum Beweis der quadratischen Konvergenz des Newton-ähnlichen Verfahrens (4.1.1) notwendig sind (Satz (4.2.1)). Durch den Einsatz besonders leistungsfähiger Diskretisierungsverfahren zur Lösung der FRWPe und zur Integration des Ableitungssystems (Bonnerot-Jamet [6]) und durch die Verwendung eines ökonomischen Verfahrens zur Lösung der linearen Approximationsprobleme (Barrodale-Young [4]) gelang die Konstruktion eines Verfahrens, das sowohl bezüglich seines Rechenzeitverbrauchs als auch seiner Stabilität und seiner guten Approximationseigenschaften den bisher bekannten Verfahren überlegen ist.

Im letzten Abschnitt (4.6) wurde seine Effizienz anhand einiger gerechneter Testbeispiele demonstriert.

VI. Literatur

1. ABDELMALEK, N.N.: The discrete linear restricted Chebyshev approximation. BIT 17, 249-261 (1977)
2. BABUSKA, I., PRAGER, M., VITASEK, E.: Numerical processes in differential equations. John Wiley, New York (1966)
3. BAIocchi, C.: Su un problema a frontiera libera connesso a questioni di idraulica. Ann. Mat. Pura Appl. 92, 107-127 (1972)
4. BARRODALE, I., YOUNG, A.: Algorithms for best L_1 and L_∞ linear approximations on a discrete set. Numer. Math. 8, 295-306 (1966)
5. BARTELT, M.: On Lipschitz conditions, strong unicity and a theorem of A.K. Cline. J. Approximation Theory 14, 245-250 (1975)
6. BONNEROT, R., JAMET, P.: A second order finite element method for the one-dimensional Stefan problem. Internat. J. Numer. Methods Engrg. 8, 811-820 (1974)
7. BUDAK, B.M., VASIL'EVA, V.I.: The solution of the inverse Stefan problem. U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys. 13, 130-151 (1974)
8. BUDAK, B.M., VASIL'EVA, V.I.: On the solution of Stefan's converse problem II. U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys. 13, 97-110 (1974)
9. CANNON, J.R.: A Cauchy problem for the heat equation. Ann. Mat. Pura Appl. 66, 155-166 (1964)
10. CANNON, J.R.: A priori estimate for the continuation of the solution of the heat equation in the space variable. Ann. Mat. Pura Appl. 65, 377-387 (1964)
11. CANNON, J.R., DOUGLAS, J.: The Cauchy problem for the heat equation. SIAM J. Numer. Anal. 4, 317-337 (1967)

12. CANNON, J.R., DOUGLAS, J.: The stability of the boundary in a Stefan problem. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 21, 83-91 (1967)
13. CANNON, J.R., EWING, R.E.: A direct numerical procedure for the Cauchy problem for the heat equation. J. Math. Anal. Appl. 56, 7-17 (1976)
14. CANNON, J.R., HILL, C.D.: Existence, uniqueness, stability and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation. J. Math. Mech. 17, 1-19 (1967)
15. CANNON, J.R., HILL, C.D.: On the infinite differentiability of the free boundary in a Stefan problem. J. Math. Anal. Appl. 22, 385-397 (1967)
16. CANNON, J.R., PRIMICERIO, M.: A two phase Stefan problem with flux boundary conditions. Ann. Mat. Pura Appl. 88, 193-228 (1971)
17. CANNON, J.R., PRIMICERIO, M.: Remarks on the one-phase Stefan problem for the heat equation with flux prescribed on the fixed boundary. J. Math. Anal. Appl. 35, 361-373 (1971)
18. CHALMERS, B.A.: On the rate of convergence of discretization in Chebyshev approximation. SIAM J. Numer. Anal. 15, 612-617 (1978)
19. CHAN, C.Y.: Continuous dependence on the data for a Stefan problem. SIAM J. Math. Anal. 1, 282-287 (1970)
20. CHENAIS, D.: On the existence of a solution in a domain identification problem. J. Math. Anal. Appl. 52, 189-219 (1975)
21. CHENEY, E.W.: Introduction to approximation theory. McGraw-Hill, New York (1966)
22. CEA, J.: Identification de domaines. Lecture Notes in Computer Science 3, Springer (1973)
23. CEA, J., GIOAN, A., MICHEL, J.: Adaption de la méthode du gradient a un problème d'identification de domaine. Lecture Notes in Computer Science 11, Springer (1974)

24. CLINE, A.K.: Lipschitz conditions on uniform approximation operators. J. Approximation Theory 8, 160-172 (1973)
25. CROMME, L.: Eine Klasse von Verfahren zu Ermittlung bester nichtlinearer Tschebyscheff-Approximationen. Numer. Math. 25, 447-459 (1976)
26. CROMME, L.: Numerische Methoden zur Behandlung einiger Problemklassen der nichtlinearen Tschebyscheff-Approximation mit Nebenbedingungen. Numer. Math. 28, 101-117 (1977)
27. CROMME, L.: Zur Tschebyscheff-Approximation bei Ungleichungsnebenbedingungen im Funktionenraum. Lecture Notes in Mathematics 556, Springer (1976)
28. CROMME, L.: Zur praktischen Behandlung linearer, diskreter Approximationsprobleme in der Maximumsnorm. SFB 72, Approximation und Optimierung, Preprint 131 (1977)
29. CROMME, L.: Rundungsfehler bei linearen Approximationsproblemen. SFB 72, Preprint 132 (1977)
30. CROMME, L.: LINDIT, a FORTRAN routine for the calculation of discrete linear maximum norm approximations. SFB 72, Preprint 133 (1977)
31. DUVAUT, G.: Résolution d'un problème de Stefan (fusion d'un bloc de glace à zéro degré). C.R. Acad. Sci. Paris 276, 1461-1463 (1973)
32. ECKHARDT, U.: Zur numerischen Behandlung inkorrekt gestellter Aufgaben. Computing 17, 193-206 (1976)
33. EVANS, G.W.: A note on the existence of a solution to a Stefan problem. Quart. Appl. Math. 9, 185-193 (1951)
34. FRIEDMAN, A.: Free boundary problems for parabolic equations I. Melting of solids. J. Math. Mech. 8, 500-517 (1959)
35. FRIEDMAN, A.: A new proof and generalisations of the Cauchy-Kowalewski theorem. Trans. Amer. Math. Soc. 98, 1-20 (1961)
36. FRIEDMAN, A.: Partial differential equations of parabolic type. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1964)

37. FRIEDMAN, A.: Remarks on Stefan-type free boundary problems for parabolic equations. J. Math. Mech. 9, 885-903 (1960)
38. FRIEDMAN, A.: One dimensional Stefan problems with non-monotone free boundary. Trans. Amer. Math. Soc. 133, 89-114 (1968)
39. FRIEDMAN, A.: The analyticity of the free boundary in the Stefan problem. Arch. Rational Mech. Anal. 61, 97-125 (1976)
40. FRIEDMAN, A., JENSEN, R.: Convexity of the free boundary in the Stefan problem and in the dam problem. Arch. Rational Mech. Anal. 67, 1-24 (1978)
41. GINSBURG, F.: On the Cauchy problem for the one-dimensional heat equation. Math. Comput. 17, 257-269 (1963)
42. HADAMARD, J.: Lectures on Cauchy's problem. Dover Publications, New York (1923)
43. HILL, C.D.: Parabolic equations in one space variable and the not-characteristic Cauchy problem. Comm. Pure Appl. Math. 20, 619-633 (1967)
44. HIRSCHMANN, I.I., WIDDER, D.V.: The convolution transform. Princeton University Press, New Jersey (1955)
45. HOFFMANN, K.-H. (Hg.): Freie Randwertprobleme I, II. SFB Approximation u. Optimierung, Preprints 22 und 28, Berlin (1977)
46. HOFFMANN, K.-H. (Hg.): Freie Randwertprobleme III. SFB Approximation u. Optimierung, Preprint 34, Berlin (1977)
47. HOFFMANN, K.-H., KLOSTERMAIR, A.: Approximation mit Lösungen von Differentialgleichungen. In "Approximationstheorie" Lecture Notes in Mathematics 556, Springer (1976)
48. HOLMGREN, E.: Sur l'extension de la méthode d'intégration de Riemann. Arkiv for Mat. och fysik (1904)
49. JOHN, F.: Continuous dependence on data for solutions of

- partial differential equations with a prescribed bound.
Comm. Pure Appl. Math. 13, 551-585 (1960)
50. KARLIN, S.: Total positivity. Stanford University Press,
Stanford (1968)
51. KINDERLEHRER, D., NIRENBERG, L.: The smoothness of the free
boundary in the one phase Stefan problem. Comm. Pure
Appl. Math. 31, 257-282 (1978)
52. KYNER, W.T.: An existence and uniqueness theorem for a non-
linear Stefan problem. J. Math. Mech. 8, 483-498 (1959)
53. LIONS, J.L., STAMPACCHIA, G.: Variational inequalities.
Comm. Pure Appl. Math. 20, 493-519 (1967)
54. MAGENES, E.: Topics in parabolic equations: Some typical
free boundary problems. In: "Boundary Value Problems
for Linear Evolution Partial Differential Equations."
D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland (1976)
55. MEINARDUS, G.: Approximation von Funktionen und ihre
numerische Behandlung. Springer (1964)
56. MEYER, G.H.: On a free interface problem for linear ordi-
nary differential equations and the one phase Stefan
problem. Numer. Math. 16, 248-267 (1970)
57. OCKENDON, J.R., HODKINS, W.R. (Hg.): Moving boundary problems
in heat flow and diffusion. Proceedings Conf. Oxford
1974, Clarendon Press, Oxford (1974)
58. ORTEGA, J., REINOLDT, W.: Iterative solution of nonlinear
equations in several variables. Academic Press,
New York (1970)
59. OSBORNE, M.R.: An algorithm for discrete, nonlinear, best
approximation problems. ISNM 16, Birkhäuser, Basel
(1972)
60. OSBORNE, M.R., WATSON, G.A.: An algorithm for minimax approxi-
mation in nonlinear case. Comput. J. 12, 63-68 (1969)
61. PUCCI, C.: Studio col metodo delle differenze di una pro-
blema di Cauchy relativo ad equazioni a derivate par-

ziali del secondo ordine di tipo parabolico. Ann.
Scuola Norm. Sup. Pisa 7, 205-215 (1953)

62. PUCCI, C.: Alcune limitazioni per le soluzioni di equazioni paraboliche. Ann. Mat. Pura Appl. 48, 161-172 (1959)
63. PUCCI, C.: On the improperly posed Cauchy problem for parabolic equations. Symposium on the numerical treatment of partial differential equations with real characteristics. Birkhäuser, Basel (1959)
64. SAGUEZ, C.: Contrôle optimale de systèmes gouvernés par des inéquations variationnelles. Application a des problèmes de frontière libre. Rapport de Recherche 191, IRIA (1976)
65. SAGUEZ, C.: Contrôle optimale d'inéquations variationnelles avec observation de domaines. Rapport de Recherche 286, IRIA (1978)
66. SCHABAK, R.: On alternation numbers in nonlinear Chebyshev approximation. Erscheint in J. Approximation Theory.
67. SCHAEFFER, G.D.: A new proof of the infinite differentiability of the free boundary in the Stefan problem. J. Differential Equations 20, 266-269 (1976)
68. SHERMAN, B.: A free boundary problem for the heat equation with prescribed flux at both fixed face and melting interface. Quart. Appl. Math. 25, 53-63 (1967)
69. TICHONOV, A.N.: Solution of incorrect formulated problems and the regularization method. Soviet Math. 4, 1035-1038 (1963)
70. TRICOMI, F.G.: Integral equations. Interscience Publishers, New York (1967)
71. WALTER, W.: Differential- und Integralungleichungen. Springer (1964)
72. WELLFORD, L.C., AYER, M.R.: A finite element free boundary formulation for the problem of multiphase heat conduction. Internat. J. Numer. Methods Engrg. 11, 933-943 (1977)

- 73. WULBERT, D.: Uniqueness and differential characterization of approximations from manifolds of functions. Amer. Math. J. 93, 350-366 (1971)
- 74. WULBERT, D.: Nonlinear approximations with tangential characterization. Amer. Math. J. 93, 718-730 (1971)

Lebenslauf

Peter Jochum	geboren am 17.5.1951 in Augsburg als zweites von zwei Kindern der Eheleute Dr. Peter und Jolanda Jochum; seit Oktober 1975 verheiratet mit Dr. Marianne Jochum, geb. Felbermeir.
Schulbildung	1957-1959 Volksschule in Steinebach 1959-1961 Volksschule in Hechendorf 1961-1970 Neusprachliches Gymnasium in Tutzing
Studium	1970-1975 Studium der Mathematik und Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München 1975 (Aug.) Diplomhauptprüfung im Fach Mathematik
Promotion	1975 (Okt.) Beginn der Dissertationsarbeit bei Prof. Dr. G. Hämmerlin
Berufstätigkeit	1975-1978 Verwalter einer wiss. Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität München.

